

**Die numerische Behandlung der Transport-  
gleichungen im Stellarator-Plasma**

**The numerical treatment of the transport  
equations in the Stellarator plasma**

R. ROMATKA, H. WOBIG

IPP 2/293

Nov. 1987



**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**

**8046 GARCHING BEI MÜNCHEN**



# MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

## GARCHING BEI MÜNCHEN

### Die numerische Behandlung der Transportgleichungen im Stellarator-Plasma

### The numerical treatment of the transport equations in the Stellarator plasma

R. ROMATKA, H. WOBIG

IPP 2/293

Nov. 1987

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*



## ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde ein Programm entwickelt, das für Stellara-toren die radialen Profile der Ionen- und Elektronentem-peratur, sowie der Dichte aus den Transportgleichungen berechnet. Dabei werden die Abhängigkeit der Diffusion von den Temperaturgradienten (Thermodiffusion) und die Abhängigkeit der Wärmeleitung von dem Dichtegradient berücksichtigt. Das elektrische Feld kann vorgegeben oder selbstkonsistent aus der Ambipolaritätsbedingung bestimmt werden, die für konstante Teilchen- und Energieflüsse ausgewertet wird. Verschiedene Modelle für die Randbedingungen sind möglich.

Als erste Anwendung wird die Frage untersucht, wie sich die Thermodiffusion auf das Transportverhalten auswirkt und ob eine Beziehung zum anomalen Transport besteht. Ein solcher Zusammenhang ist nicht feststellbar. Rechnungen mit selbstkonsistent bestimmtem elektrischen Feld und Rechnungen, bei denen das elektrische Feld null gesetzt wurde, werden verglichen und die Auswirkungen des ambi-polaren elektrischen Feldes auf das Transportverhalten werden diskutiert. Ein einfaches Modell für modifizierte Randbedingungen wird betrachtet.



## INHALTSVERZEICHNIS

I. Einleitung . . . . .	5
II. Die Transportgleichungen . . . . .	7
II.1. Die Transportkoeffizienten . . . . .	12
II.2. Die Ambipolaritätsbedingung . . . . .	19
II.3. Rechnungen mit vorgegebenem elektrischen Feld . . . . .	21
II.4. Die Quellterme . . . . .	22
II.5. Die Randbedingungen . . . . .	23
III. Numerische Methoden . . . . .	25
IV. Numerische Ergebnisse . . . . .	28
IV.1. Die Referenz-Rechnungen . . . . .	28
IV.2. Der Effekt der Nichtdiagonal-Elemente der Transportmatrix . . . . .	37
IV.3. Rechnung mit veränderter Randbedingung . . . . .	43
IV.4. Effekt des selbstkonsistent berechneten radialen elektrischen Feldes . . . . .	45
V. Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	55



## VORBEMERKUNG

Dieser Bericht ist eine Zusammenfassung meiner Diplomarbeit [1]. Im Rahmen dieses Berichts erschien ein einleitendes Kapitel überflüssig und wurde daher weggelassen. Auch das Interesse an den Details der numerischen Methoden ist wahrscheinlich gering; das entsprechende Kapitel wurde deshalb stark gekürzt. Die restlichen Kapitel wurden weitgehend unverändert aus der Diplomarbeit übernommen.



## I. Einleitung

Die Transportgleichungen stellen einen Zusammenhang her zwischen dem Dichteprofil sowie den Elektronen- und Iontemperaturprofilen und dem Massenfluß sowie den Energieflüssen. Die Flüsse wiederum stehen im Zusammenhang mit den Teilchen- und Energiequellen und Senken. In der vorliegenden Arbeit werden alle übrigen Größen aus den Quellen und Senken bestimmt. Diese Vorgehensweise entspricht am ehesten der experimentellen Situation, bei der auch nur auf die Quellen und Senken Einfluß genommen werden kann.

Eine Alternative besteht darin von den Profilen auszugehen — entweder gemessene Profile oder ad hoc Annahmen (siehe z.B. [2]) — und die dazu gehörigen Flüsse zu bestimmen. Da die Flüsse selbst aber nicht gemessen werden, ist es schwierig zu beurteilen, ob das gewählte Transportmodell realistisch ist. Dies wird vielmehr vorausgesetzt.

Die Transporttheorie ist am ausführlichsten für den (fast) axisymmetrischen Tokamak behandelt worden. Das liegt einerseits daran, daß der Tokamak innerhalb des Fusionsprogramms eine Vorrangstellung innehat, andererseits auch daran, daß dieser Fall wegen der Symmetrie leichter zu behandeln ist.

Transportrechnungen für den Stellarator orientierten sich daher anfänglich an Tokamakrechnungen. So wurde die Thermoeffusion vernachlässigt, sowie die Tatsache, daß das radiale elektrische Feld durch die Transportvorgänge bestimmt ist (Ambipolaritätsbedingung). Solche Codes sind z.B. TEMPL [3] oder WHISTEL [4]. Insbesondere das ambipolare elektrische Feld hat auf den Stellaratortransport entscheidenden Einfluß [5]. Trotzdem wurde bisher in nur wenigen Rechnungen das ambipolare elektrische Feld selbstkonsistent berücksichtigt [6, 7].

Der von uns entwickelte Code unterscheidet sich von dem von Hasting u.a. [6, 7] verwendeten dadurch, daß die Ambipolaritätsbedingung nicht für festgehaltene Dichte- und Temperaturgradienten ausgewertet wird, sondern für vorgegebene Teilchen- und Energieflüsse. Dies ist angebracht, da wir den stationären Fall betrachten im Gegensatz zu Hasting u.a., die die zeitliche Entwicklung untersuchen. Die Beschränkung auf den stationären Fall ermöglicht es auch, das Problem der mehrfachen Lösungen der Ambipolaritätsbedingung sorgfältig zu behandeln. Es wird nämlich nach allen drei Lösungen der Ambipolaritätsbedingung gesucht und



anschließend, sofern mehrere gefunden wurden, eine davon ausgewählt. Dadurch ist es so gut wie ausgeschlossen, Scheineffekte zu produzieren, die lediglich darauf beruhen, daß beim Lösen der Ambipolaritätsbedingung der Algorithmus ohne physikalische Notwendigkeit von einer Lösung zur anderen springt. Dies könnte durchaus für die von Hasting [6] durchgeführten Rechnungen der Fall sein [8].

Im Rahmen bisheriger Rechnungen (TEMPL, WHISTEL) ist es nötig, neben den "neoklassischen" Transportvorgängen noch "anomale" Transportvorgänge anzunehmen, um die experimentellen Meßergebnisse reproduzieren zu können. Mit "neoklassisch" werden dabei alle Transportvorgänge bezeichnet, die sich im Rahmen der kinetischen Theorie beschreiben lassen, also durch Stoßprozesse bedingt sind. Unter den Begriff "anomal" werden alle Transportvorgänge subsummiert, die zwar experimentell beobachtet werden, aber "neoklassisch" nicht erklärbar sind. Vielfach wird angenommen, daß anomale Transportvorgänge durch Fluktuationen verursacht sind oder durch Störungen des Magnetfeldes (Ergodisierung, Inselbildung). Diese Erklärungen sind auch im hohen Maße wahrscheinlich, dennoch war nicht auszuschließen, daß der "anomale" Transport zumindest teilweise durch die bisher nicht berücksichtigten neoklassischen Vorgänge — insbesondere Thermodiffusion — erklärbar sei.

Die ersten Anwendungen des neuen Codes haben natürlich zum Ziel die Unterschiede herauszuarbeiten, die sich durch die Erweiterungen ergeben. Diese sind: Erstens, die Verwendung der vollen Transportmatrix, nicht nur die Diagonalterme. Zweitens, die Möglichkeit allgemeinerer Randbedingungen. Drittens, die selbstkonsistente Berechnung des ambipolaren radialen elektrischen Felds. Dabei wurde besonders auf einen möglichen Zusammenhang mit dem anomalen Transport geachtet.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kap. II sind die der Rechnung zugrundeliegenden Gleichungen dargestellt und kommentiert; in Kap. III werden die numerischen Methoden erläutert; Kap. IV beinhaltet die Ergebnisse der Rechnungen und in Kap. V werden diese Ergebnisse sowie Schlußfolgerungen daraus zusammengefaßt.

## II. Die Transportgleichungen

Die Transportgleichungen bestehen aus zwei Gruppen. Die erste Gruppe läßt sich aus der Erhaltung von Energie und Teilchen herleiten, die zweite wird mit Hilfe der kinetischen Theorie abgeleitet. Dabei wird die Existenz der magnetischen Flußflächen ausgenützt. Wir skizzieren die Vorgehensweise am Beispiel der Dichte. Ausgegangen wird von der Erhaltung der Teilchen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla(n\vec{u}) + Q \quad (II.1)$$

Dabei bezeichnet  $n$  die Dichte,  $n\vec{u}$  den lokalen Dichtefluß und  $Q$  Quellen oder Senken, welche in einem Plasma wegen Ionisation oder Rekombination vorhanden sein können. Entlang der Feldlinien können sich die Teilchen nahezu frei bewegen. Daher ist es angebracht anzunehmen, daß die Dichte auf einer Flußfläche nahezu konstant ist. Dies wird jetzt ausgenützt, indem über die Flußflächen gemittelt wird. Ein dazu geeigneter Operator ist [9]:

$$\langle F \rangle = \frac{\int F d^3x}{\int d^3x}$$

für jede auf den Flußflächen definierte Größe  $F$ . Das Integrationsvolumen  $\Delta V$  ist dabei das Volumen, das von zwei infinitesimal benachbarten Flußflächen eingeschlossen wird. Jetzt wird eine zunächst beliebige radiale Koordinate  $\Psi$  eingeführt, welche die Flußflächen parametrisiert. Ein mögliche Wahl für diese Koordinate ist z.B. ein mittlerer kleiner Radius, der magnetische Fluß durch diese Fläche oder das von ihr eingeschlossene Volumen. Es ist  $\nabla\Psi$  senkrecht zu den Flußflächen. Mit dem Gauss'schen Satz läßt sich dann für einen Vektor  $\vec{F}$  zeigen:

$$\langle \nabla \cdot \vec{F} \rangle = \frac{1}{V'} \frac{d}{d\Psi} [V' \langle \vec{F} \cdot \nabla\Psi \rangle]$$

Wobei  $V$  das Volumen bezeichnet, welches von der mit  $\Psi$  bezeichneten Flußfläche eingeschlossen wird, und  $V'$  ist die Ableitung  $V' = dV/d\Psi$ .

Wenden wir dieses Ergebnis auf (II.1) an, so erhalten wir

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{V'} \frac{d}{d\Psi} [V' \langle n\vec{u} \cdot \nabla\Psi \rangle] + \langle Q \rangle$$



Da im Folgenden nur mit den Mittelwerten gerechnet wird scheidet man abkürzend

$$n := \langle n \rangle \quad Q := \langle Q \rangle \quad \Gamma := \langle n \vec{u} \cdot \nabla \Psi \rangle$$

und man erhält

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{V'} \frac{d}{d\Psi} [V' \Gamma] + Q \quad (II.2)$$

Die Abhängigkeit des Flusses  $\Gamma$  von den Gradienten wird mit der kinetischen Theorie berechnet. Die kinetische Theorie liefert den totalen Fluß aus einer magnetischen Fläche.

$$\Gamma_{tot} = \int df \int \vec{v}_d \cdot \frac{\nabla \Psi}{|\nabla \Psi|} f_1 d^3 v$$

Dabei ist  $f_1$  der Störungsterm der Verteilungsfunktion  $f = f_{max} + f_1$  und  $\vec{v}_d$  die ( $\vec{v}$ -abhängige) Driftgeschwindigkeit. Das Flächenintegral erstreckt sich dabei über eine magnetische Flußfläche. Nachdem  $f_1$  mittels Störungsrechnung bestimmt worden ist, läßt sich  $\Gamma_{tot}$  für Stellaratoren in der Form

$$\Gamma_{tot} = \sum_{k=1}^2 L_{1,k} A_k$$

schreiben. In  $A_1$  und  $A_2$  sind die Gradienten enthalten

$$A_1 = \frac{n'}{n} - \frac{3T'}{2T} - \frac{eE}{kT} \quad ; \quad A_2 = \frac{T'}{T}$$

( $E$  ist das radiale elektrische Feld)

Einen Mittelwert für den mittleren lokalen Fluß erhält man indem man durch die effektive Fläche

$$V' = \int \frac{df}{|\nabla \Psi|}$$

dividiert:

$$\frac{1}{V'} \Gamma_{tot} = \Gamma = \chi_{n,n} n' + \chi_{n,T} T' + \chi_{n,E} E \quad (II.3)$$

wobei

$$\chi_{n,n} = \frac{1}{V'_n} L_{1,1}$$

$$\chi_{n,T} = \frac{1}{V'_T} \left( L_{1,2} - \frac{3}{2} L_{1,1} \right)$$

$$\chi_{n,E} = -\frac{e}{V'_k T} L_{1,1}$$

Um zu sehen, daß dieser Fluß  $\Gamma$  mit dem oben definierten  $\Gamma = \langle n\vec{u} \cdot \nabla\Psi \rangle$  identisch ist, gehen wir noch einmal zur Definition des Mittelungsoperators zurück.

$$\langle n\vec{u} \cdot \nabla\Psi \rangle = \frac{\int n\vec{u} \cdot \nabla\Psi d^3x}{\int d^3x}$$

Dabei ist  $\Delta V$  ein Volumen, das von zwei infinitesimal benachbarten Flußflächen begrenzt wird. Führt man den Grenzübergang durch, so läßt sich die Mittelung durch Oberflächenintegrale über die magnetischen Flußflächen ausdrücken.

$$\begin{aligned} \langle n\vec{u} \cdot \nabla\Psi \rangle &= \frac{\int n\vec{u} \cdot \nabla\Psi \frac{df}{|\nabla\Psi|}}{\int \frac{df}{|\nabla\Psi|}} \\ &= \frac{1}{V'} \int df n\vec{u} \frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|} \end{aligned}$$

Da  $n = \int f d^3v$  ist und  $f_{max}$  (in  $f = f_{max} + f_1$ ) symmetrisch in  $|\vec{v}|$  ist und deshalb bei der  $d^3v$ -Integration herausfällt, kann man schreiben:

$$V' \langle n\vec{u} \cdot \nabla\Psi \rangle = \int df \int \vec{v}_d \frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|} f_1 d^3v$$

Damit ist die Gleichheit der beiden Ausdrücke gezeigt.

Indem man die Energieerhaltungs- und Wärmeleitungsgleichung analog behandelt und verschiedene Dichten und Temperaturen für Ionen und Elektronen erlaubt, erhält man die Transportgleichungen für ein Stellarator-Plasma in allgemeiner Form.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\frac{1}{V'(\Psi)} \cdot \frac{\partial}{\partial\Psi} [V'(\Psi)\Gamma_{n_e}] + Q_{n_e} \quad (II.4a)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\frac{1}{V'(\Psi)} \cdot \frac{\partial}{\partial\Psi} [V'(\Psi)\Gamma_{n_i}] + Q_{n_i} \quad (II.4b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( n \frac{3}{2} kT_e \right) = -\frac{1}{V'(\Psi)} \cdot \frac{\partial}{\partial\Psi} [V'(\Psi)\Gamma_{T_e}] + Q_{T_e} \quad (II.4c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( n \frac{3}{2} kT_i \right) = -\frac{1}{V'(\Psi)} \cdot \frac{\partial}{\partial\Psi} [V'(\Psi)\Gamma_{T_i}] + Q_{T_i} \quad (II.4d)$$

und

$$\Gamma_{n_e} = \left( -\chi_{n_e, n_e} \frac{dn_e}{d\Psi} - \chi_{n_e, T_e} \frac{dT_e}{d\Psi} - \chi_{n_e, \phi} \frac{d\phi}{d\Psi} \right) \quad (II.5a)$$



$$\Gamma_{n_i} = \left( -\chi_{n_i, n_i} \frac{dn_i}{d\Psi} - \chi_{n_i, T_i} \frac{dT_i}{d\Psi} - \chi_{n_i, \phi} \frac{d\phi}{d\Psi} \right) \quad (II.5b)$$

$$\Gamma_{T_e} = \left( -\chi_{T_e, n_e} \frac{dn_e}{d\Psi} - \chi_{T_e, T_e} \frac{dT_e}{d\Psi} - \chi_{T_e, \phi} \frac{d\phi}{d\Psi} \right) \quad (II.5c)$$

$$\Gamma_{T_i} = \left( -\chi_{T_i, n_i} \frac{dn_i}{d\Psi} - \chi_{T_i, T_i} \frac{dT_i}{d\Psi} - \chi_{T_i, \phi} \frac{d\phi}{d\Psi} \right) \quad (II.5d)$$

Dabei ist für die zweite Gruppe der Gleichungen von allgemeineren Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichungen ausgegangen worden.

Als neue Größe hinzugekommen ist  $\phi$ , das Potential des radialen elektrischen Felds  $E = -\nabla\phi$ . Die Bedeutung aller anderen Größen ist wahrscheinlich offensichtlich.  $T_e, T_i, n_e, n_i$  sind die Temperaturen und Dichten von Elektronen und Ionen.  $\Gamma_{T_e}, \Gamma_{T_i}, \Gamma_{n_e}, \Gamma_{n_i}$  sind die entsprechenden Energie- und Teilchenflüsse.  $Q_{T_e}, Q_{T_i}, Q_{n_e}, Q_{n_i}$  sind Energie- und Teilchenquellen sowie Senken; die  $Q$ 's subsumieren alle möglichen physikalische Prozesse, wie Ionisation, Heizung, Strahlungsverluste usw. In Abschnitt II.4 wird näher auf sie eingegangen werden.

Die Transportkoeffizienten  $\chi_{j,k}$  sind selber Funktionen der Temperaturen  $T_e, T_i$ , der Dichten  $n_e, n_i$  und des ambipolaren elektrischen Feldes  $E = -\nabla\phi$ . Diese Abhängigkeit bestimmt hauptsächlich die Form der Dichte- und Temperaturprofile. Die Formeln, die für sie verwendet werden sind in Abschnitt II.1 dargestellt und erläutert.

Das radiale elektrische Feld ist gegeben durch die Ambipolaritätsbedingung:

$$n_e = n_i =: n$$

$$\Gamma_{n_e} = \Gamma_{n_i}$$

Sie besagt, daß eine Ladungstrennung auf einer makroskopischen Längenskala nicht möglich ist, denn das dabei entstehende elektrische Feld würde die Ladungen sofort wieder zusammentreiben. Auch die Ambipolaritätsbedingung wird in einem eigenen Abschnitt (II.2) eingehender behandelt. Um die Rechnung zu vereinfachen besteht aber auch die Möglichkeit, die Transportgleichungen zu einem vorgegebenen elektrischen Feld  $E = E(\Psi, T_e, T_i, n)$  zu lösen.

Durch die Ambipolaritätsbedingung ist das Gleichungssystem schon vereinfacht worden, denn je zwei Gleichungen für den Teilchentransport fallen zusam-

men. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich dadurch, daß in dieser Arbeit nur der stationäre Fall behandelt wird, für den alle Zeitableitungen verschwinden. Ob für  $t \rightarrow \infty$  tatsächlich sich ein stationärer Zustand einstellt oder ob ein oszillatorisches Verhalten auftritt, ist damit natürlich nicht mehr beantwortbar. (Vgl. z.B. [6]). Auch die Frage, wie das Plasma auf sich zeitlich verändernde äußere Bedingungen reagiert muß offen bleiben.

Durch diese Beschränkung ist es aber möglich geworden, größere Sorgfalt bei der Behandlung des stationären Falles walten zu lassen, insbesondere bei der Berechnung des ambipolaren elektrischen Feldes. Außerdem zeigen die Experimente, daß sich stationäre Zustände einstellen, so daß der Ansatz von dieser Seite her gerechtfertigt ist.

Für die numerischen Rechnungen muß noch die radiale Koordinate genau spezifiziert werden. Dazu wird ein mittlerer Radius  $r$  definiert, der mit  $\Psi$  durch die Beziehung

$$2\pi R \cdot \pi r^2 = V(\Psi) \quad (II.6)$$

verknüpft ist.  $R$  ist dabei der "große" Radius des betrachteten Stellarators. Bezüglich dieser Koordinate  $r$  verhält sich  $V$  also wie ein Zylindervolumen.

Aus Gleichung (II.6) folgt

$$\frac{d}{d\Psi} = \frac{V'}{4\pi^2 r R} \cdot \frac{d}{dr}$$

und damit transformieren sich die Gleichungen für den stationären ambipolaren Fall zu

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Gamma_n) = Q_n \quad (II.7a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Gamma_{T_e}) = Q_{T_e} \quad (II.7b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Gamma_{T_i}) = Q_{T_i} \quad (II.7c)$$

und

$$\Gamma_n = -\chi_{n,n} \frac{dn}{dr} - \chi_{n,T_e} \frac{dT_e}{dr} - \chi_{n,T_i} \frac{dT_i}{dr} - \chi_{n,\phi} \frac{d\phi}{dr} \quad (II.8a)$$

$$\Gamma_{T_e} = -\chi_{T_e,n} \frac{dn}{dr} - \chi_{T_e,T_e} \frac{dT_e}{dr} - \chi_{T_e,\phi} \frac{d\phi}{dr} \quad (II.8b)$$

$$\Gamma_{T_i} = -\chi_{T_i, n} \frac{dn}{dr} - \chi_{T_i, T_i} \frac{dT_i}{dr} - \chi_{T_i, \phi} \frac{d\phi}{dr} \quad (II.8c)$$

Dies sind die Gleichungen, die numerisch gelöst werden. Sie bilden ein System von sechs nichtlinearen gekoppelten impliziten Differentialgleichungen. Ergänzt werden diese durch sechs Randbedingungen, auf welche im Abschnitt II.5 näher eingegangen wird.

## II.1. DIE TRANSPORTKOEFFIZIENTEN

Alle Transportkoeffizienten können in der Form

$$\chi = \chi^{(axi)} + \chi^{(rpl)} + \chi^{(an)}$$

angegeben werden. Dabei ist  $\chi^{(axi)}$  der Anteil, der auch in axisymmetrischen Fusionsmaschinen (Tokamak) auftritt.  $\chi^{(rpl)}$  ist der Anteil, der durch den helikalen Rippel des Stellarators hervorgerufen wird, und  $\chi^{(an)}$  ist der Koeffizient der anomalen Diffusion bzw. Elektronenwärmeleitung.

### II.1.1. DER AXISYMMETRISCHE ANTEIL

Diese Transportkoeffizienten sind die ersten, die mit Hilfe der kinetischen Theorie berechnet wurden. Diese Entwicklung scheint inzwischen zu einem Abschluß gekommen zu sein, alle in der letzten Zeit in Übersichtsartikeln publizierten Werte stimmen weitgehend überein. In dieser Arbeit werden die von Kovrizhnykh [2, 10] angegebenen Formeln verwendet:

$$\chi_{n_e, n_e}^{(axi)} = \frac{3.16a_e}{1 + 2.52\alpha_e} \quad \chi_{n_e, \phi}^{(axi)} = -\frac{|e|n_e}{T_e} \chi_{n_e, n_e}^{(axi)} \quad (II.9a)$$

$$\chi_{n_e, T_e}^{(axi)} = \frac{n_e}{T_e} \left( \frac{3.53a_e}{1 + 0.94\alpha_e} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3.16a_e}{1 + 2.52\alpha_e} \right)$$

$$\chi_{n_i, n_i}^{(axi)} = \frac{1.09a_i}{1 + 0.87\alpha_i} \quad \chi_{n_i, \phi}^{(axi)} = +\frac{|e|n_i}{T_i} \chi_{n_i, n_i}^{(axi)} \quad (II.9b)$$

$$\chi_{n_i, T_i}^{(axi)} = \frac{n_i}{T_i} \left( \frac{1.46a_i}{1 + 0.39\alpha_i} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1.09a_i}{1 + 0.87\alpha_i} \right)$$

$$\chi_{T_e, n_e}^{(axi)} = \frac{3.53a_e}{1 + 0.94\alpha_e} \quad \chi_{T_e, \phi}^{(axi)} = -\frac{|e|n_e}{T_e} \chi_{T_e, n_e}^{(axi)} \quad (II.9c)$$

$$\chi_{T_e, T_e}^{(axi)} = n_e \left( \frac{7.4a_e}{1 + 0.49\alpha_e} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3.53a_e}{1 + 0.94\alpha_e} \right)$$



$$\begin{aligned}\chi_{T_i, n_i}^{(axi)} &= \frac{1.46a_e}{1 + 0.39\alpha_i} & \chi_{T_i, \phi}^{(axi)} &= + \frac{|e|n_i}{T_i} \chi_{T_i, n_i}^{(axi)} \\ \chi_{T_i, T_i}^{(axi)} &= n_i \left( \frac{3.28a_i}{1 + 0.22\alpha_i} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1.46a_i}{1 + 0.39\alpha_i} \right)\end{aligned}\quad (II.9d)$$

mit den Abkürzungen:

$$a_j = \frac{\hat{\Delta}\nu_j}{\iota^2} \left( \frac{R\nu_j}{r\omega_j} \right)^2 \quad ; \quad \alpha_j = \frac{\hat{\Delta}R^3\nu_j}{\iota r^2\nu_j} \quad (II.10)$$

$\nu_j$  bezeichnet die Stoßfrequenz:

$$\nu_j = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \frac{e^4 n_j \lambda}{m_j^{1/2} T_j^{3/2}} \quad (II.11)$$

$v_j$  die thermische Geschwindigkeit:

$$v_j = \sqrt{\frac{T_j}{m_j}} \quad (II.12)$$

und  $\omega_j$  die Zyklotronfrequenz:

$$\omega_j = \frac{eB_0}{m_j c} \quad (II.13)$$

Der Koeffizient  $\hat{\Delta}$  wird angenähert durch

$$\hat{\Delta} = \sqrt{\epsilon_h + \epsilon_t} - \sqrt{\epsilon_h}$$

wobei  $\epsilon_h$  und  $\epsilon_t$  der helikale bzw. der toroidale Rippel sind. Das magnetische Feld wird also angenähert durch:

$$B = B_0 [1 + \epsilon_t(r) \cos(\theta) + \epsilon_h(r) \cos(\ell\theta + m\phi)]$$

Die Bedeutung der übrigen Symbole ist:  $R$  großer Radius des Torus,  $r$  kleiner Radius,  $\iota$  Rotationstransformation,  $e$  Elementarladung,  $\lambda$  Coulomblogarithmus,  $m_e, m_i$  Masse der Elektronen bzw. Ionen,  $c$  Lichtgeschwindigkeit.  $\theta$  ist der poloidale Winkel und  $\phi$  der toroidale Winkel der Toruskoordinaten;  $\ell, m$  sind die Anzahl der helikalen bzw. toroidalen Perioden.  $\epsilon_t(r)$  ist gleich dem inversen

Aspektverhältnis  $\epsilon_t = (r/R)$ , während  $\epsilon_h$  in der Form  $\epsilon_h = \epsilon_0 + \epsilon_1(r/a)^\kappa$  beschrieben wird.  $\epsilon_0, \epsilon_1, \kappa \in \{1, 2\}$  werden vorgegeben um das Magnetfeld zu simulieren;  $a$  ist der kleine Radius des Plasmarandes.

Zu  $\chi_{T_e, T_e}^{(axi)}$  und  $\chi_{T_i, T_i}^{(axi)}$  wird noch der Term

$$\chi_j^{(HD)} = 2 \left( 1 + 1.6 \frac{1}{l^2} \right) \nu_j \left( \frac{v_j}{\omega_j} \right)^2 \quad (II.14)$$

(Pfirsch-Schlüter Diffusion) addiert. Dies ist eine Korrektur, die von der hydrodynamischen Approximation herrührt und sich nur bei sehr hohen Stoßfrequenzen bemerkbar macht.

Diese Formeln wurden wegen der übersichtlichen Form und leichten Programmierbarkeit gewählt. Um diese Transportkoeffizienten mit denen von Hinton und Hazeltine [9] zu vergleichen wurde die Gleichung  $0 = \Gamma_i^{(axi)} = \chi_{n_i, n_i}^{(axi)} n_i' + \chi_{n_i, T_i}^{(axi)} T_i' + \chi_{n_i, \phi}^{(axi)} \phi'$  nach  $\phi'$  aufgelöst. Das Ergebnis wird in die drei restlichen Gleichungen eingesetzt und man erhält so etwas andere numerische Koeffizienten in den Formeln (II.9). Diese Transportkoeffizienten stimmen dann mit den von Hinton und Hazeltine angegebenen sehr gut überein.

### II.1.2. DER RIPPELANTEIL

Hier werden die von Shaing [11] angegebenen Formeln verwendet. Sie sind gegeben durch die Gleichungen :

$$\chi_{n_j, n_j}^{(rpl)} = \epsilon_t \sqrt{\epsilon_h} v_{d_j}^2 n_j \int_0^\infty x^{2.5} e^{-x} \frac{\nu_j(x)}{\epsilon_h \omega^2(x)} dx \quad (II.15a)$$

$$\chi_{n_j, T_j}^{(rpl)} = \epsilon_t \sqrt{\epsilon_h} v_{d_j}^2 n_j \int_0^\infty x^{2.5} e^{-x} \frac{\nu_j(x)}{\epsilon_h \omega^2(x)} (x - 1.5) dx \quad (II.15b)$$

$$\chi_{T_j, n_j}^{(rpl)} = \epsilon_t \sqrt{\epsilon_h} v_{d_j}^2 n_j T_j \int_0^\infty x^{3.5} e^{-x} \frac{\nu_j(x)}{\epsilon_h \omega^2(x)} dx \quad (II.15c)$$

$$\chi_{T_j, T_j}^{(rpl)} = \epsilon_t \sqrt{\epsilon_h} v_{d_j}^2 n_j T_j \int_0^\infty x^{3.5} e^{-x} \frac{\nu_j(x)}{\epsilon_h \omega^2(x)} (x - 1.5) dx \quad (II.15d)$$

$$\chi_{n_j, \phi}^{(rpl)} = \frac{e_j n_j}{T_j} \chi_{n_j, n_j}^{(rpl)} \quad ; \quad \chi_{T_j, \phi}^{(rpl)} = \frac{e_j n_j}{T_j} \chi_{T_j, n_j}^{(rpl)} \quad (II.15e)$$

Der Index  $j$  steht für  $e$ (Elektronen) oder  $i$ (Ionen),  $\omega$  ist eine Abkürzung für  $\omega^2 = \omega_d^2 + \omega_s^2 + \omega_p^2 + \omega_\nu^2$  mit

$$\omega_d^2 = 1.67 \frac{\epsilon_t}{\epsilon_h} (\omega_E + \omega_{\nabla B_j})^2 \quad ; \quad \omega_s^2 = 0.25 \left( \frac{\epsilon_t}{\epsilon_h} \right)^{3/2} \omega_{\nabla B_j}^2 \quad (II.16)$$

$$\omega_p^2 = 0.6 |\omega_{\nabla B_j}| \frac{\nu_j(x)}{\epsilon_h} \quad ; \quad \omega_\nu^2 = 3 \frac{\nu_j^2(x)}{\epsilon_h^2}$$

Die verschiedenen Beiträge zu  $\omega$  spiegeln die verschiedenen möglichen Teilchenbahnen wider, je nachdem welche der Frequenzen dominiert. Z.B. für  $\omega_E$  dominant befindet man sich im "collisionless detrapping regime" und für  $\omega_\nu$  dominant im  $\frac{1}{\nu}$  Regime.

Die weiteren Abkürzungen sind:

$v_{d_j}$  ist die Driftgeschwindigkeit

$$v_{d_j} = \frac{cT_j}{e_j B r} \quad (II.17)$$

$\omega_E$  ist die  $E \times B$ -Driftfrequenz

$$\omega_E = \frac{c\phi'}{B r} \quad (II.18)$$

$\omega_{\nabla B}$  ist die  $\nabla B$ -Driftfrequenz

$$\omega_{\nabla B_j} = -\frac{cT_j \epsilon'_h}{e_j B r} x \quad ; \quad \epsilon'_h = \frac{d\epsilon_h}{dr} \quad (II.19)$$

Anschaulich sind  $\omega_E$  und  $\omega_{\nabla B}$  dadurch bestimmt, daß sie die Frequenz angeben, mit der (fast) geschlossene Bahnen durchlaufen werden, die durch die  $E \times B$ -Drift bzw. die  $\nabla B$ -Drift erzeugt werden.

Die Integrationsvariable ist  $x = \frac{E_{kin}}{kT}$ ; die restlichen Symbole sind bereits in Abschnitt II.1.1 erklärt worden.

Zur numerischen Berechnung der diesen Gleichungen entsprechenden Transportkoeffizienten konnte auf ein Unterprogramm zurückgegriffen werden, das freundlicherweise von Herrn Dr. Wobig zur Verfügung gestellt wurde. Die bei der Berechnung notwendige Integration wird dabei numerisch durchgeführt.



Die von Kovrizhnykh [2, 10] angegebenen Formeln für den Rippelanteil wurden zu Vergleichszwecken implementiert aber in dem endgültigen Programm nicht verwendet. Der Grund lag zum einen in rechentechnischen Schwierigkeiten. In die Gleichungen (13) in [2] gehen die Integrale  $\int_0^r n_j^2 T_j^{-3/2} r dr$  und  $\int_0^r n_j^2 T_j^{-1/2} r dr$  ein. Diese müßten für die Profile, die gerade berechnet werden, numerisch bestimmt werden. Außerdem treten ebenfalls in Gleichungen (13), [2] die Gradienten  $n'_j, T'_j$  auf. Das würde bedeuten, daß statt der linearen Gleichungen (II.5) nun nicht-lineare verwendet werden müßten, um  $n'_j, T'_j$  zu bestimmen. Bei der ersten Implementation zum Vergleich mit (II.15) behelfen wir uns damit die Ausdrücke (13), [2] für ein parabolisches Profil zu bestimmen.

Dieser Vergleich zeigt, daß über die Größe des Rippel-Transportkoeffizienten noch recht starke Uneinigkeit herrscht. (Vergleiche Bild 1 und Bild 2)

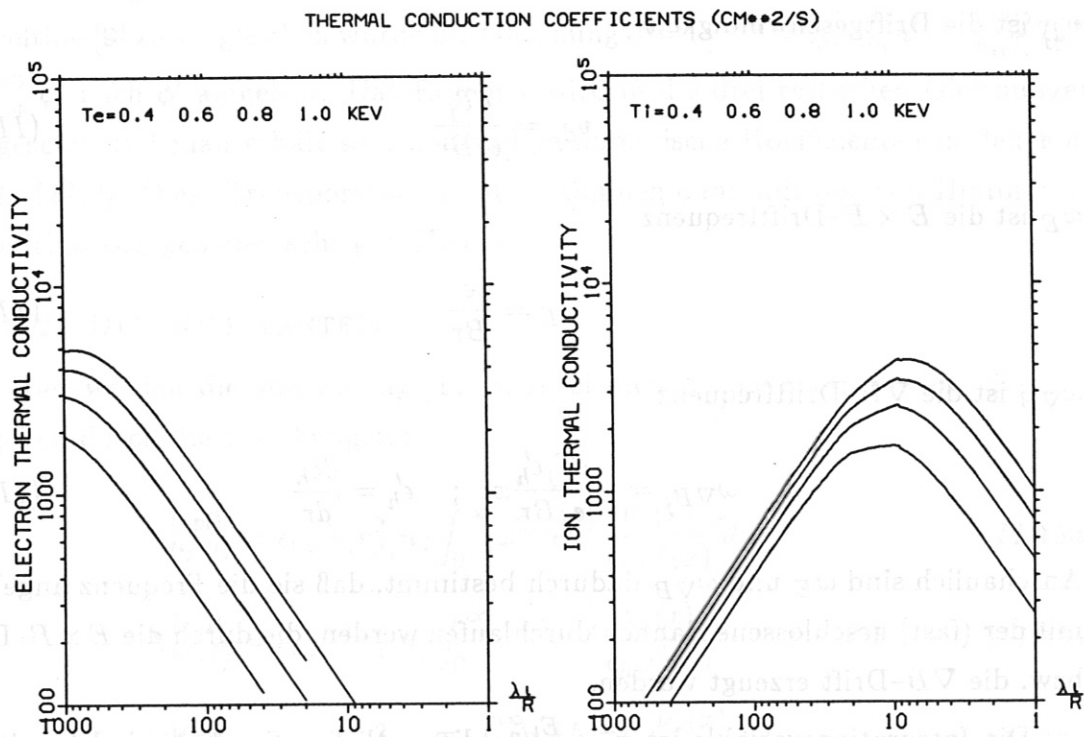


Abb. 1: Der Verlauf der Wärmeleitkoeffizienten als Funktion der normierten freien Weglänge nach Kovrizhnykh

Ausschlaggebend für die Wahl der Formeln von Shaing [11] war, daß für diese Formeln Vergleiche vorliegen mit Werten, die mittels Monte Carlo Metho-

THERMAL CONDUCTION COEFFICIENTS (CM<sup>2</sup>/S)

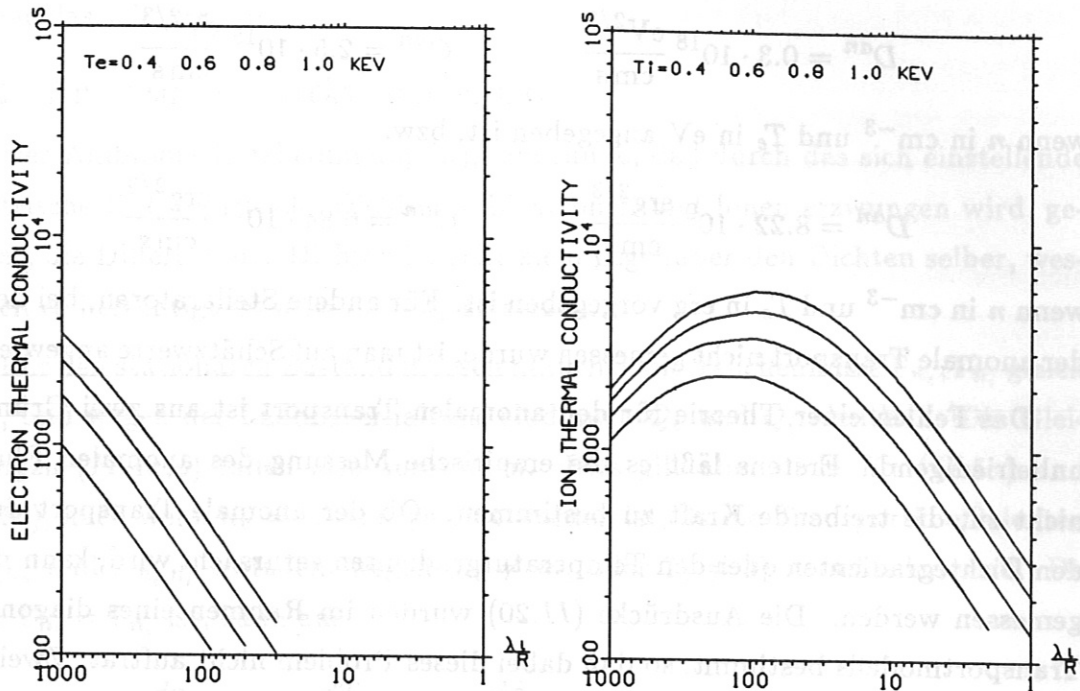


Abb. 2: Der Verlauf der Wärmeleitungskoeffizienten als Funktion der normierten freien Weglänge nach Shaing

den berechnet wurden [12] und dabei gute Übereinstimmung zeigen. Entsprechende Vergleiche für die Formeln von Kovrizhnykh konnten nicht gefunden werden. Außerdem sind Abweichungen von diesen Formeln festgestellt worden, wenn die Transportkoeffizienten durch numerisches Lösen der Fokker-Planck-Gleichung bestimmt werden [13]. Insgesamt erschienen daher die Formeln (II.15) besser abgesichert.

### II.1.3. DER ANOMALE ANTEIL

Die anomalen Transportkoeffizienten sind aus Meßdaten empirisch abgeleitet worden. Für sie wurde noch keine befriedigende Theorie gefunden. Die gemessenen Werte sind :

$$\chi_{n,n}^{(an)} = \frac{D^{an}}{nT_e^{2/3}} \quad (II.20a)$$

$$\chi_{T_e,T_e}^{(an)} = \frac{C^{an}}{T_e^{2/3}} \quad (II.20b)$$

Für den Stellarator WVII-A haben  $D^{an}, C^{an}$  die Werte [14]:

$$D^{an} = 0.3 \cdot 10^{18} \frac{\text{eV}^{2/3}}{\text{cm s}} \quad C^{an} = 2.5 \cdot 10^{18} \frac{\text{eV}^{2/3}}{\text{cm s}}$$

wenn  $n$  in  $\text{cm}^{-3}$  und  $T_e$  in eV angegeben ist, bzw.

$$D^{an} = 8.22 \cdot 10^9 \frac{\text{erg}^{2/3}}{\text{cm s}} \quad C^{an} = 6.84 \cdot 10^{11} \frac{\text{erg}^{2/3}}{\text{cm s}}$$

wenn  $n$  in  $\text{cm}^{-3}$  und  $T_e$  in erg vorgegeben ist. Für andere Stellaratoren, bei denen der anomale Transport nicht gemessen wurde, ist man auf Schätzwerte angewiesen.

Das Fehlen einer Theorie für den anomalen Transport ist aus zwei Gründen unbefriedigend. Erstens läßt es die empirische Messung des anomalen Flusses nicht zu, die treibende Kraft zu bestimmen. Ob der anomale Transport durch den Dichtegradienten oder den Temperaturgradienten verursacht wird, kann nicht gemessen werden. Die Ausdrücke (II.20) wurden im Rahmen eines diagonalen Transportmodells bestimmt, so daß dabei dieses Problem nicht auftrat. Zweitens ist unbekannt, ob, und wenn ja wie, die anomalen Transportkoeffizienten vom ambipolaren elektrischen Feld abhängen. Dies könnte starken Einfluß auf das ambipolare elektrische Feld haben. In Ermangelung einer begründbaren Alternative wird jedoch davon ausgegangen, daß die anomale Diffusion von sich aus ambipolar ist, d.h.  $\chi_{n_e, n_e}^{(an)} = \chi_{n_i, n_i}^{(an)}$  unabhängig von dem ambipolaren elektrischen Feld.

Weitere Unsicherheiten kommen auf, weil eine mögliche Wechselwirkung zwischen anomalem und Rippeltransport unberücksichtigt bleibt. Der Ansatz  $\chi = \chi^{(neokl)} + \chi^{(an)}$  wäre dann nicht mehr gerechtfertigt. Außerdem wird die Formel für den anomalen Transport über den ganzen Plasmaradius verwendet; bestimmt wurde sie dagegen im wesentlichen aus Messungen der Elektronentemperaturen in der Nähe des Plasmarands.

Da jedoch für die anomale Diffusion kein theoretisches Modell zur Verfügung steht, bleibt keine Alternative zu (II.20).

Im Hinblick auf zukünftige Experimente kann man hoffen, daß diese Probleme weniger ins Gewicht fallen. Denn in zukünftigen Experimenten werden die Temperaturen höher liegen. Das bedeutet, daß  $\chi^{(an)}$  kleiner wird,  $\chi^{(neokl)}$  dagegen anwächst. Falls die Konstanten  $D^{an}$  und  $C^{an}$  für diese Experimente nicht angewachsen sein sollten, z.B. wegen des stärkeren Magnetfelds oder des



größeren "großen" Radius, könnte bei genügend hohen Temperaturen  $\chi^{(an)}$  sogar vernachlässigbar werden.

## II.2. DIE AMBIPOLARITÄTSBEDINGUNG

Der Ambipolaritätsbedingung liegt zugrunde, daß durch das sich einstellende elektrische Feld die gleiche Dichte für Elektronen und Ionen erzwungen wird, genauer, die Differenz der Dichten ist sehr klein gegenüber den Dichten selber, weswegen es berechtigt ist  $n := n_e = n_i$  zu setzen.

Für den stationären Zustand müssen natürlich die Teilchenflüsse  $\Gamma_{n_e}, \Gamma_{n_i}$  gleich sein, und wegen der Ladungserhaltung sind auch  $Q_e$  und  $Q_i$  identisch. Die Gleichungen (II.4a,b) fallen also zusammen. Dies gilt aber nicht für (II.5a) und (II.5b), auch wenn  $n_e = n_i =: n$  gesetzt worden ist, da die Transportkoeffizienten  $\chi_{n_e, n_e}$  und  $\chi_{n_i, n_i}$  trotzdem wegen  $m_e \neq m_i$  oder  $T_e \neq T_i$  verschieden sind. Da aber  $\Gamma_{n_e} = \Gamma_{n_i}$  ist, kann aus

$$\begin{aligned} \Gamma_{n_e} &= -\chi_{n_e, n_e} \frac{dn}{dr} - \chi_{n_e, T_e} \frac{dT_e}{dr} - \chi_{n_e, \phi} \frac{d\phi}{dr} = \\ &= -\chi_{n_i, n_i} \frac{dn}{dr} - \chi_{n_i, T_i} \frac{dT_i}{dr} - \chi_{n_i, \phi} \frac{d\phi}{dr} = \Gamma_{n_i} \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

das elektrische Feld  $\phi'$  bestimmt werden. Dies ist die Ambipolaritäts-Bedingung. Da die Transportkoeffizienten selbst auch von dem elektrischen Feld abhängen (vgl.(II.15);  $\phi'$  tritt in  $\omega_E$  auf) ist (II.21) nichtlinear. Es können folglich mehrere Lösungen von (II.21) existieren, wie schon seit längerem bekannt [5, 6].

In dem Programm wird so vorgegangen, daß nach drei Lösungen gesucht wird — mehr sind nicht zu erwarten — und daß, wenn mehrere gefunden wurden, die kleinste oder größte Lösung verwendet wird, je nachdem wie vom Benutzer spezifiziert. Einzelheiten sind in der Diplomarbeit [1] Abschnitt IV.4 beschrieben. Diese beiden Möglichkeiten sollen demnächst ergänzt werden durch ein drittes Entscheidungskriterium, welches auf die Stabilität der jeweiligen Lösungen Bezug nimmt. Ein solches Kriterium ist z.B. von Catto und Myra [15] angegeben worden.

Das Ergebnis von Shaing [11] ist hier nicht anwendbar, denn bei dessen Ableitung wurde die Ambipolaritätsbedingung für feste Gradienten  $n', T_e', T_i'$  ausgewertet. Da das elektrische Feld erheblich schneller relaxiert als die Gradienten, be-

schreibt diese Gleichung das Feld, das sich momentan einstellt. Auf einer längeren Zeitskala wird sich jedoch das Transportverhalten ändern, weil das elektrische Feld die Transportkoeffizienten beeinflusst. Dann läßt sich die Ambipolaritätsbedingung nicht von den restlichen Transportgleichungen losgelöst betrachten und muß wie folgt interpretiert werden.

Gegeben sind die Flüsse  $\Gamma_n, \Gamma_{T_e}, \Gamma_{T_i}$ . Die Transportkoeffizienten sind als Funktion des ambipolaren elektrischen Feldes  $E$  bekannt. Damit lassen sich aus den Transportgleichungen

$$\Gamma_n = -\chi_{n,n}n' - \chi_{n,T_e}T_e' - \chi_{n,T_i}T_i' - \chi_{n,\phi}\phi' \quad (II.22a)$$

$$\Gamma_{T_e} = -\chi_{T_e,n}n' - \chi_{T_e,T_e}T_e' - \chi_{T_e,\phi}\phi' \quad (II.22b)$$

$$\Gamma_{T_i} = -\chi_{T_i,n}n' - \chi_{T_i,T_i}T_i' - \chi_{T_i,\phi}\phi' \quad (II.22c)$$

die Gradienten  $n', T_e', T_i'$  als Funktionen des elektrischen Feldes  $E = -\Phi'$  berechnen. Die Dichtegleichung (II.22a) ist durch Linearkombination der Gleichungen (II.5a, b) entstanden:  $\Gamma_n := (1 - \lambda)\Gamma_{n_e} + \lambda\Gamma_{n_i}$ . Die Wahl  $\lambda = \frac{1}{2}$  hat sich numerisch als am günstigsten erwiesen. Diese Gradienten gehen dann in die Ambipolaritätsbedingung ein, die in der Form

$$\begin{aligned} \Delta(E) = \Gamma_{n_e}(E) - \Gamma_{n_i}(E) &= \\ &= (\chi_{n_i,n_i}(E) - \chi_{n_e,n_e}(E)) \cdot n'(E) \\ &\quad - \chi_{n_e,T_e}(E) \cdot T_e'(E) + \chi_{n_i,T_i}(E) \cdot T_i'(E) \\ &\quad + (\chi_{n_e,\phi}(E) - \chi_{n_i,\phi}(E)) \cdot E \end{aligned} \quad (II.23)$$

geschrieben wird. Die Nullstelle von  $\Delta(E)$  muß bestimmt werden.

Das Problem der unterschiedlichen Interpretation der Ambipolaritätsbedingung und die Folgen für die Stabilitätsbedingung sind noch umstritten. (siehe [16, 17, 18, 8] und auch den Artikel von Hastings [6]) Zu letzterem wäre anzumerken, daß das Auftreten von zwei Lösungen oder keiner (vgl. Fig. 2 in [6]) nur durch das einfache Modell für die Diffusionskoeffizienten bedingt ist. Für realistischere Diffusionskoeffizienten sind wieder eine oder drei Lösungen zu erwarten.

### II.3. RECHNUNGEN MIT VORGEGEBENEM ELEKTRISCHEN FELD

Diese Rechnungen sind hauptsächlich zu Vergleichszwecken durchgeführt worden, außerdem sind die Ergebnisse gut zu gebrauchen als Ausgangsnäherung für Rechnungen, bei denen das elektrische Feld selbstkonsistent bestimmt wird.

Da das vorgegebene elektrische Feld das ambipolare nur annähern kann, gilt im allgemeinen

$$\chi_{n_e, n_e} n'_e + \chi_{n_e, T_e} T'_e + \chi_{n_e, \phi} \phi' \neq \chi_{n_i, n_i} n'_i + \chi_{n_i, T_i} T'_i + \chi_{n_i, \phi} \phi'$$

Damit erhebt sich die Frage, ob nun die Elektronen- oder Ionendichtegleichung verwendet werden soll. In dem Programm wurden wahlweise beide Möglichkeiten realisiert. Bei der Vorgabe  $E = 0$  wird im allgemeinen die Ionendichtegleichung die Dichte und Teilcheneinschlußzeit nach unten abschätzen, die Elektronendichtegleichung nach oben.

Eine dritte Möglichkeit existiert, wenn man ignoriert, daß die Transportkoeffizienten vom elektrischen Feld abhängen und  $\chi_{n_i, n_i} \gg \chi_{n_e, n_e}$  berücksichtigt. Dann kann nämlich das elektrische Feld näherungsweise aus

$$0 = -\chi_{n_i, n_i} n' - \chi_{n_i, T_i} T'_i - \chi_{n_i, \phi} \phi' \quad (II.24)$$

bestimmt werden zu:

$$\phi' = -\frac{1}{\chi_{n_i, \phi}} (\chi_{n_i, n_i} n' + \chi_{n_i, T_i} T'_i) \quad (II.25)$$

Setzt man dies in die restlichen Gleichungen ein, so haben die Transportgleichungen nun die Gestalt:

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= -\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \chi_{n_e, n_e} n' - \chi_{n, T_e} T'_e - \frac{T_i}{T_e} \frac{\chi_{n_e, n_e}}{\chi_{n_i, n_i}} \chi_{n, T_i} T'_i \\ \Gamma_{T_e} &= -\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \chi_{T_e, n} n' - \chi_{T_e, T_e} T'_e - \frac{T_i}{T_e} \frac{\chi_{n, T_i}}{\chi_{n_i, n_i}} \chi_{T_e, n} T'_i \\ \Gamma_{T_i} &= \left(\chi_{T_i, T_i} - \frac{\chi_{n, T_i}}{\chi_{n_i, n_i}} \chi_{T_i, n}\right) T'_i \end{aligned} \quad (II.26)$$

wobei die Beziehungen

$$\chi_{n_i, \phi} = ne \frac{\chi_{n_i, n_i}}{T_i} \quad ; \quad \chi_{n_e, \phi} = -ne \frac{\chi_{n_e, n_e}}{T_e}$$



$$\chi_{T_i, \phi} = ne \frac{\chi_{T_i, n}}{T_i} \quad ; \quad \chi_{T_e, \phi} = -ne \frac{\chi_{T_e, n}}{T_e}$$

ausgenutzt wurden. Diese Näherung an die Ambipolaritätsbedingung ist gut solange der axisymmetrische Anteil der Transportkoeffizienten dominiert, der unabhängig vom ambipolaren elektrischen Feld ist. Die in [9] angegebenen Transportkoeffizienten sind unter einer (II.24) entsprechenden Bedingung bestimmt worden. Aber auch auf den Rippltransport wurde (II.24) schon angewendet [19].

#### II.4. DIE QUELLTERME

Die Quellterme  $Q_n, Q_{T_e}, Q_{T_i}$  werden im wesentlichen als Funktionen des Radius  $r$  vorgegeben. Es wurde

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_n^{(ext)} \\ Q_{T_i} &= P_i^{(ext)} + P_{ei} \\ Q_{T_e} &= P_e^{(ext)} - P_{ei} - P_{rad} \end{aligned} \quad (II.27)$$

verwendet. Dabei ist  $Q_n^{(ext)}$  die Teilchenquelle (durch Ionisation),  $P_i^{(ext)}$  ( $P_e^{(ext)}$ ) die von den Ionen (Elektronen) absorbierte Heizleistung,  $P_{ei}$  der Elektron-Ion Wärmeaustausch durch Coulombstöße sowie  $P_{rad}$  Strahlungsverluste. Die Profile lauten im einzelnen:

$$\begin{aligned} Q_n^{(ext)} &= Q_{n0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{\beta_n} \left(1 - \lambda_n e^{-\left(\frac{r-r_n}{d_n}\right)^2}\right) \\ P_i^{(ext)} &= P_{i0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{\beta_i} \\ P_e^{(ext)} &= P_{e0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{\beta_e} \\ P_{rad} &= P_{rad0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{\beta_s} \left(1 - \lambda_s e^{-\left(\frac{r-r_s}{d_s}\right)^2}\right) \end{aligned} \quad (II.28)$$

Durch die Parameter  $\beta_n, \beta_i, \beta_e, \beta_s$  wird beeinflusst, wie stark das Profil auf das Plasmazentrum konzentriert ist, mit  $\lambda_n, r_n, d_n$  bzw.  $\lambda_s, r_s, d_s$  lassen sich Höhe, Lage und Weite eines zweiten Maximums im Profil steuern.

Lediglich  $P_{ei}$  ist nicht als Profil sondern durch

$$P_{ei} = 3n\nu_e(T_i - T_e) \quad (II.29)$$

gegeben.  $\nu_e$  ist die Elektronstoßfrequenz, siehe (II.11). Diese Formel wurde aus [20] übernommen.

Die Angabe der Quellterme mittels radialen Profilen entspricht natürlich nicht der physikalischen Situation. Die Terme sollten eigentlich Prozesse simulieren, die im Plasma auftreten, z.B. Ionisation von Neutralgas, Absorption der Heizleistung, verschiedene Arten von Strahlungsverlusten usw. Diese Prozesse sind zumeist weniger eine Funktion des Radius allein, als auch der Dichte und der Temperaturen. Dennoch ist eine Angabe durch Profile zunächst akzeptabel. Denn häufig sind auch die physikalischen Prozesse nicht lückenlos beschreibbar. Es werden also nur neue Unbekannte gegen alte ausgetauscht, wie z.B. die Neutralgasdichte gegen  $Q_{n_0}$  im Falle der Ionisation. Zweitens lassen sich die ungefähren Profile der Quellen, die sich tatsächlich einstellen, abschätzen und drittens zeigt es sich, daß die Verteilung der Quellen zwar auf die absoluten Größen der Ergebnisse Einfluß hat, kaum aber auf die Form von Dichte- und Temperaturprofilen. Da quantitative Vergleiche mit Experimenten zunächst nicht beabsichtigt sind, erscheint die Angabe der Quellen als radiales Profil ausreichend. Für zukünftige Anwendungen ist eine Erweiterung des Codes im Programm bereits vorgesehen.

## II.5. DIE RANDBEDINGUNGEN

Drei Randbedingungen ergeben sich daraus, daß das Plasma als symmetrisch zum Mittelpunkt angenommen wird. Es folgt, daß die Flüsse im Zentrum (d.h. für  $r = 0$ ) verschwinden müssen.

$$\Gamma_n(0) = \Gamma_{T_e}(0) = \Gamma_{T_i}(0) = 0 \quad (II.30)$$

Bei den restlichen drei Randbedingungen ist man in der Wahl frei. Die einfachste Wahl ist es die Dichte sowie die Temperaturen am Rand vorzugeben.

$$n(a) = n_a \quad ; \quad T_e(a) = T_{e_a} \quad ; \quad T_i(a) = T_{i_a} \quad (II.31)$$

Eine weitere Möglichkeit erhält man, wenn man annimmt, daß die über den Plasmarand diffundierenden Teilchen verloren gehen. Da jedes Teilchen seine eigene

kinetische Energie mit sich abführt, erhält man einen Zusammenhang zwischen den Energieflüssen und dem Massenfluß am Plasmarand:

$$\begin{aligned}\Gamma_{T_e}(a) &= \frac{3}{2}kT_e(a)\Gamma_n(a) \\ \Gamma_{T_i}(a) &= \frac{3}{2}kT_i(a)\Gamma_n(a)\end{aligned}\tag{II.32a}$$

Diese beiden Gleichungen werden noch durch die Vorgabe der Dichte am Plasmarand ergänzt.

$$n(a) = n_a\tag{II.32b}$$

Beide Varianten wurden im Programm realisiert.



### III. Numerische Methoden

Die Differentialgleichungen so wie sie in Kapitel II formuliert sind, sind zunächst implizit. Um sie numerisch zu lösen ist es vorteilhaft nach  $\Gamma'_n, \Gamma'_{T_e}, \Gamma'_{T_i}$  und  $n', T'_e, T'_i$  aufzulösen. Für die erste Gruppe ist dies einfach, man erhält:

$$\begin{aligned}\Gamma'_n &= Q_n - \frac{\Gamma_n}{r} \\ \Gamma'_{T_e} &= Q_{T_e} - \frac{\Gamma_{T_e}}{r} \\ \Gamma'_{T_i} &= Q_{T_i} - \frac{\Gamma_{T_i}}{r}\end{aligned}\quad (III.1)$$

Für die zweite Gruppe muß das lineare Gleichungssystem (II.5) gelöst werden. Formal läßt sich die Lösung als

$$\begin{pmatrix} n' \\ T'_e \\ T'_i \end{pmatrix} = \chi^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_n + \chi_{n,\phi} \phi' \\ \Gamma_{T_e} + \chi_{T_e,\phi} \phi' \\ \Gamma_{T_i} + \chi_{T_i,\phi} \phi' \end{pmatrix}\quad (III.2)$$

schreiben. ( $\phi'$  ist in diesem Zusammenhang fest vorgegeben.)  $\chi$  bezeichnet die Matrix der Transportkoeffizienten

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{n,n} & \chi_{n,T_e} & \chi_{n,T_i} \\ \chi_{T_e,n} & \chi_{T_e,T_e} & 0 \\ \chi_{T_i,n} & 0 & \chi_{T_i,T_i} \end{pmatrix}$$

Damit läßt sich das Problem als explizite Differentialgleichung  $\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y})$  formulieren, dabei ist

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} \Gamma_n \\ \Gamma_{T_e} \\ \Gamma_{T_i} \\ n \\ T_e \\ T_i \end{pmatrix}$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} Q_n - \frac{\Gamma_n}{r} \\ Q_{T_e} - \frac{\Gamma_{T_e}}{r} \\ Q_{T_i} - \frac{\Gamma_{T_i}}{r} \\ \chi^{-1} \begin{pmatrix} \Gamma_n + \chi_{n,\phi} \phi' \\ \Gamma_{T_e} + \chi_{T_e,\phi} \phi' \\ \Gamma_{T_i} + \chi_{T_i,\phi} \phi' \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

und  $x = r$ .

Hier ist die in der numerischen Mathematik übliche Konvention übernommen worden, daß ein Strich unter den Größen “\_” einen Vektor bezeichnet. Dies dient auch zur Unterscheidung zu Vektoren im Sinne der Physik.

Entscheidend für dieses Vorgehen ist, daß (III.2) lösbar ist, d.h., daß  $X$  nicht singular ist. Um dies zu zeigen kann wie folgt argumentiert werden. Man kann die thermodynamischen Variablen wechseln und zu solchen übergehen, bei denen die thermodynamischen Flüsse  $F_i$  und Kräfte  $f_i$  zueinander konjugiert sind. Für diese gibt es eine zu (III.2) äquivalente Gleichung.

$$F_i = \sum_j \alpha_{ij} f_j \quad (III.3)$$

Die den Stoßprozessen zugrunde liegenden Prozesse sind invariant gegen Zeitumkehr. Deshalb garantiert die Onsager-Relation, daß  $\alpha_{ij}$  symmetrisch und positiv definit ist. Folglich ist (III.3) lösbar und damit auch (III.2), da es ja zu (III.3) äquivalent ist.

In der Praxis wird nicht (III.2) gelöst, sondern

$$\begin{pmatrix} \Gamma_n + \chi_{n,\phi}\phi' \\ \Gamma_{T_e} + \chi_{T_e,\phi}\phi' \\ \Gamma_{T_i} + \chi_{T_i,\phi}\phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{n,n} & \frac{T_e}{n} \chi_{n,T_e} & \frac{T_i}{n} \chi_{n,T_i} \\ \frac{1}{T_e} \chi_{T_e,n} & \frac{1}{n} \chi_{T_e,T_e} & 0 \\ \frac{1}{T_i} \chi_{T_i,n} & 0 & \frac{1}{n} \chi_{T_i,T_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n' \\ \frac{nT_e'}{T_e} \\ \frac{nT_i'}{T_i} \end{pmatrix} \quad (III.4)$$

Das hat den Vorteil, daß alle Elemente der Matrix die gleiche Dimension  $\text{cm}^2\text{s}^{-1}$  haben und deshalb die Zahlenwerte von gleicher Größenordnung sind. Dadurch ist die zu invertierende Matrix equilibriert und die Inversion numerisch stabil.

Nachdem die Differentialgleichung in explizite Form gebracht worden ist, läßt sich das Randwertproblem in der folgenden allgemeinen Form schreiben

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \quad (III.5)$$

$$\underline{r}(\underline{y}(a), \underline{y}(b)) = 0 \quad (a < b) \quad (III.6)$$

Es wird gelöst mittels eines modifizierten Mehrzielverfahrens (Multiple Shooting/Splitting Method), welches ausgehend vom klassischen Mehrzielverfahren (siehe [21]) auf die spezielle Problemstellung hin entwickelt wurde. Die Modifikationen zum klassischen Mehrzielverfahren sind in [1] beschrieben.

Zur Lösung der dabei anfallenden Anfangswertprobleme wird das Extrapolationsverfahren (siehe [22, 23]) verwendet. Dieses Verfahren ermöglicht bei der selbstkonsistenten Berechnung des elektrischen Feldes große Rechenzeitersparnis indem mittels Interpolation Schätzwerte für das  $E$ -Feld bereitgestellt werden können [1].

#### IV. Numerische Ergebnisse

Mit diesen Rechnungen wurde das Ziel verfolgt die Unterschiede herauszuarbeiten, die sich durch die Erweiterungen zu älteren Programmen ergeben. Dazu werden zunächst zum Vergleich die Ergebnisse von Rechnungen präsentiert, bei denen nur die Diagonalterme  $\chi_{n,n}$ ,  $\chi_{T_e,T_e}$  und  $\chi_{T_i,T_i}$  der Transportmatrix verwendet wurden, das elektrische Feld gleich Null gesetzt wurde, und als Randbedingungen fest Werte für Dichte und Temperaturen vorgegeben wurden. Diese Rechnungen unterscheiden sich nur geringfügig von Rechnungen mit dem TEMPL-Code.

Als erste Erweiterung wird auf die Nichtdiagonal-Terme der Transportmatrix eingegangen, sodann folgt die Diskussion der modifizierten Randbedingungen und des selbstkonsistent berechneten elektrischen Feldes.

Da der Schwerpunkt der Rechnungen auf dem Herausarbeiten neuer Effekte lag, wurde auf einen detaillierten Vergleich mit Meßergebnissen verzichtet. Jedoch wurde darauf geachtet, daß die Rechnungen im Parameterbereich des Stellarators WVII-A lagen, um sicherzustellen, daß die Rechnungen experimentelle Relevanz haben.

##### IV.1. DIE REFERENZ-RECHNUNGEN

Um die Ergebnisse untereinander möglichst gut vergleichen zu können, wurden die meisten der Eingabeparameter für alle Rechnungen festgehalten. Dazu gehören: Der große Radius  $R = 2$  m; der kleine Radius des Plasmarands  $a = 10$  cm; das Magnetfeld  $B = 3.2 \cdot 10^4$  G; die Rotationstransformation  $\iota = 0.45$  und der helikale Rippel  $\epsilon_h = \epsilon_0 + \epsilon_1 \left(\frac{r}{a}\right)^\kappa$  mit  $\epsilon_0 = 0$ ,  $\epsilon_1 = 0.024$  und  $\kappa = 1$ .

Die Profile mit denen die Heizleistung sowie die Teilchennachfüllrate modelliert werden, wurden durchgehend als parabolisch angenommen.

$$Q_n^{(ext)} = Q_{n_0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$$
$$P_j^{(ext)} = P_{j_0} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$$

$Q_{n_0}$  wurde, wenn nötig, so modifiziert, daß die zentrale Dichte Werte annimmt, die mit Meßergebnissen in etwa in Einklang stehen. Für  $P_{e_0}$  und  $P_{i_0}$  erwies sich ein solches Nachführen als nicht notwendig; es konnte  $P_{e_0}$  und  $P_{i_0}$  konstant gehalten werden, so daß die von den Elektronen absorbierte Leistung bei 80kW lag, während



die Ionen keine externe Heizung erhielten ( $P_{i0} = 0$ ). Sie wurden lediglich durch den Austauschterm  $P_{ei}$  (siehe (II.29)) geheizt. Diese Wahl simuliert ein Heizen des Plasmas durch Elektronzyklotronheizung (ECRH), welche am W7A als eine Heizmöglichkeit zur Verfügung stand.

Für die meisten Rechnungen wurden als Randbedingungen  $n(a) = 10^{12} \text{ cm}^3$ ,  $T_e(a) = T_i(a) = 50 \text{ eV}$  gewählt. Diese Werte liegen etwas über den experimentellen Daten. Da die erhöhten Randwerte jedoch die Rechenzeit oft erheblich verkürzen und da ein quantitativer Vergleich mit Meßwerten nicht angestrebt wird, erscheint die Wahl gerechtfertigt. Qualitativ ist nach wie vor gute Übereinstimmung von gemessenen und berechneten Profilen erreichbar.

Zu jeder Rechnung wird eine Tabelle mit den wichtigsten veränderlichen Eingabedaten und Ergebnissen angegeben. Diese sind im einzelnen:

- Gesamtnachfüllrate  $\phi$ : Sie gibt an wieviel Teilchen pro Sekunde dem Stellarator zugeführt werden:  $\phi = \int_0^a 2\pi R \cdot 2\pi r \cdot Q_n^{(ext)}(r) dr$
- Nicht-diagonal Elemente: Es wird angegeben, ob die Nichtdiagonal-Elemente der Transportmatrix verwendet werden.
- Elektrisches Feld: Es wird angegeben, ob das elektrische Feld selbstkonsistent berechnet wurde oder welche Methode ersatzweise verwendet wurde. Es bedeutet " $E = 0, n_e$ ", daß das elektrische Feld gleich null gesetzt wurde, und, daß die Elektronen-Dichtegleichung verwendet wurde. " $E = 0, n_i$ " analog.
- Anomale Diffusion: Es wird angegeben, ob die anomale Diffusion berücksichtigt wurde.

eventuell:

- Randbedingungen, falls sie von der Standardwahl abweichen.
- Strahlungsverluste, sofern welche in der Rechnung berücksichtigt wurden.
- Zentral- und Mittelwert der Dichte:  $n(0)$  und  $\langle n \rangle$
- Zentral- und Mittelwert der Elektronentemperatur  $T_e(0)$  und  $\langle T_e \rangle$ .
- Zentral- und Mittelwert der Ionentemperatur  $T_i(0)$  und  $\langle T_i \rangle$ .
- Teilchen- und Energieeinschlußzeiten  $\tau_n$  und  $\tau_E$ .

Die Mittelwerte der Temperaturen sind mit der Dichte gewichtet:

$$\langle T_j \rangle = \frac{1}{k} \frac{2 E_j}{3 N_{tot}}$$

wobei  $N_{tot}$  die Gesamtzahl der vorhandenen Teilchen ist

$$N_{tot} = \int_0^a 2\pi R \cdot 2\pi r \cdot n(r) dr$$

und  $E_j$  die gesamte in der Spezies  $j$  gespeicherte Energie:

$$E_j = \int_0^a 2\pi R \cdot 2\pi r \cdot \frac{3}{2} k T_j(r) \cdot n(r) dr$$

Die Einschlußzeiten sind über die Teilchen- bzw. Energieflüsse am Plasmarand definiert:

$$\tau_n = \frac{N_{tot}}{2\pi R \cdot 2\pi r \cdot \Gamma_n(a)}$$

und

$$\tau_E = \frac{E_i + E_e}{2\pi R \cdot 2\pi r \cdot (\Gamma_{T_i}(a) + \Gamma_{T_e}(a))}$$

Bild 3 zeigt die Profile einer Rechnung (Rechnung 1), die stellvertretend als Beispiel für Rechnungen mit älteren Programmen (TEMPL) durchgeführt wurde. Das elektrische Feld ist gleich Null gesetzt, nur die Diagonalterme  $\chi_{n,n}, \chi_{T_e,T_e}, \chi_{T_i,T_i}$  der Transportmatrix finden Verwendung und diese beinhalten aber auch die anomalen Transportkoeffizienten.

Tab. 1: Rechnung 1

$$\phi = 1.5 \cdot 10^{20} \text{s}^{-1}$$

Nichtdiagonal-Elemente : nicht verwendet

elektrisches Feld :  $E = 0$  ;  $n_e$

anomale Diffusion : berücksichtigt

$$n(0) = 8.53 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} \quad ; \quad T_e(0) = 0.86 \text{keV} \quad ; \quad T_i(0) = 0.25 \text{keV}$$

$$\langle n \rangle = 2.48 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} \quad ; \quad \langle T_e \rangle = 0.48 \text{keV} \quad ; \quad \langle T_i \rangle = 0.20 \text{keV}$$

$$\tau_E = 2.0 \text{ms} \quad ; \quad \tau_n = 6.5 \text{ms}$$

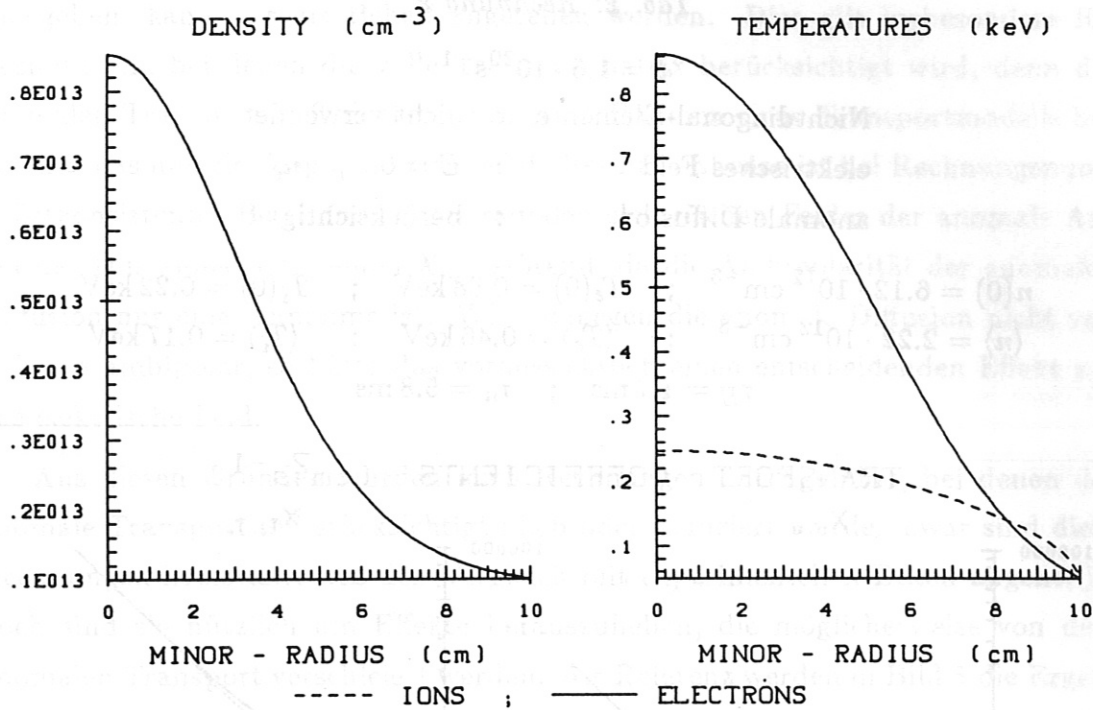


Abb. 9: Dichte- und Temperaturprofile der Vergleichsrechnung. (Rechnung 1)

Der Verlauf dieser Profile ist typisch für Rechnungen dieser Art. Durch Variieren der Teilchennachfüllrate und der Heizleistung, sowie der entsprechenden Depositionsprofile kann innerhalb der Messfehler Übereinstimmung mit experimentellen Daten erreicht werden [3].

Bei dieser Rechnung wurde für die Dichtegleichung der Elektronen-Diffusionskoeffizient verwendet, d.h.  $\chi_{n,n} := \chi_{n_e,n_e}$ . Verwendet man statt dessen den Ionen-Diffusionskoeffizienten ( $\chi_{n,n} := \chi_{n_i,n_i}$ ), so verändert sich der Verlauf der Profile nur wenig; lediglich die absoluten Werte verändern sich geringfügig. Sie sind in der Tabelle 2 aufgeführt.

Der Grund für die erstaunlich geringen Unterschiede liegt darin, daß der anomale Transport dominiert. Bild 4 zeigt die Transportkoeffizienten als Funktion des Radius für die Rechnung 1.

Der in der Bildlegende mit "classical" bezeichnete Anteil ist der axisymmetrische Anteil  $\chi^{(axi)}$ . Wegen der Form der Transportkoeffizienten

$$\chi = \chi^{(axi)} + \chi^{(rpl)} + \chi^{(an)}$$

Tab. 2: Rechnung 2

$$\phi = 1.5 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$$

Nichtdiagonal-Elemente : nicht verwendet

elektrisches Feld :  $E = 0$  ;  $n_i$

anomale Diffusion : berücksichtigt

$$n(0) = 6.12 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} ; T_e(0) = 0.88 \text{ keV} ; T_i(0) = 0.22 \text{ keV}$$

$$\langle n \rangle = 2.22 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} ; \langle T_e \rangle = 0.46 \text{ keV} ; \langle T_i \rangle = 0.17 \text{ keV}$$

$$\tau_E = 1.7 \text{ ms} ; \tau_n = 5.8 \text{ ms}$$

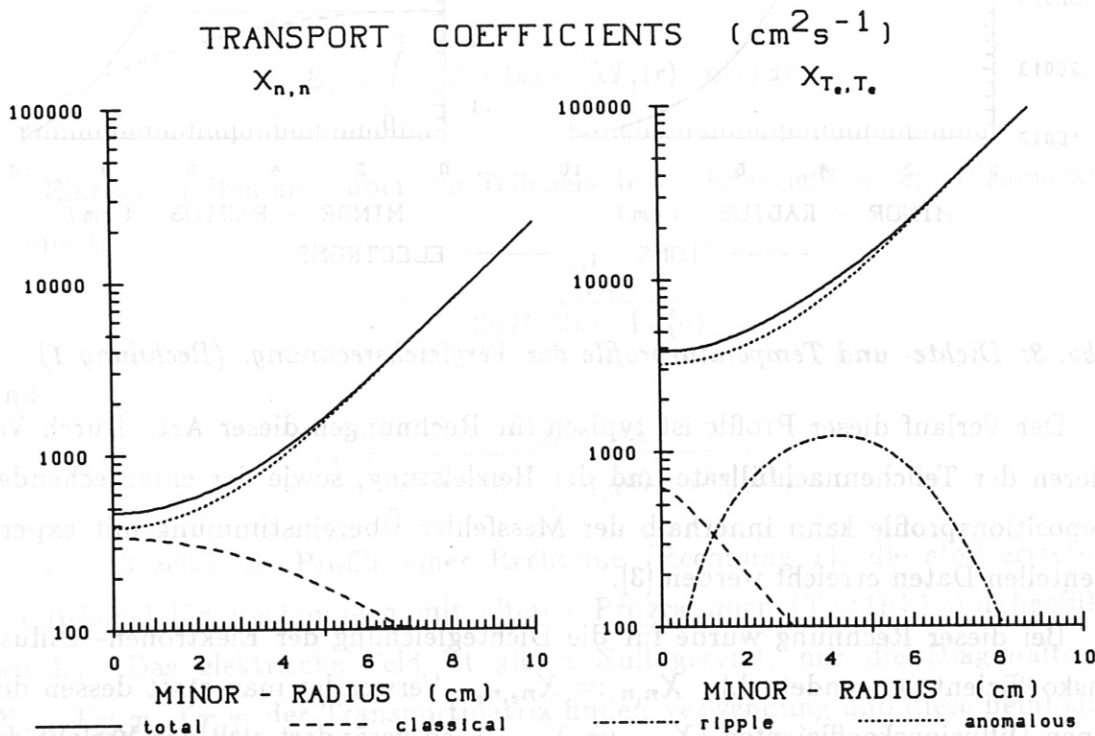


Abb. 4: Diffusions- und Elektronenwärmeleitungskoeffizient als Funktionen des Radius in Rechnung 1

ist in diesem Fall allein  $\chi_{n,n}^{(an)}$  ausschlaggebend. Die Unterschiede von  $\chi_{n_e,n_e}^{(axi)}$  und  $\chi_{n_i,n_i}^{(axi)}$  bzw.  $\chi_{n_e,n_e}^{(rpl)}$  und  $\chi_{n_i,n_i}^{(rpl)}$  fallen nicht ins Gewicht. Der anomale Anteil ist aber als von sich aus ambipolar angenommen worden, d.h.  $\chi_{n_e,n_e}^{(an)} = \chi_{n_i,n_i}^{(an)}$ . Die Elektronen- und Ionendiffusionskoeffizienten unterscheiden sich daher bei diesen zwei Rechnungen nur wenig.

Die Verwendung der anomalen Transportkoeffizienten so wie in Abschnitt II.1.3



angegeben, kann nur als Behelf angesehen werden. Dies gilt insbesondere für Rechnungen, bei denen die volle Transportmatrix berücksichtigt wird, denn die anomalen Transportkoeffizienten wurden im Rahmen eines Transportmodells bestimmt, das nur die Diagonalterme beinhaltet hat. Ebenso ist bei Rechnungen mit selbstkonsistenter Bestimmung des radialen elektrischen Feldes der anomale Anteil des Diffusionskoeffizienten  $\chi_{n,n}$  störend, da die Ambipolarität der anomalen Diffusion nur eine Annahme ist. Wäre dagegen die anomale Diffusion nicht von sich aus ambipolar, so hätte das voraussichtlich einen entscheidenden Effekt auf das elektrische Feld.

Aus diesen Gründen wurden auch Rechnungen durchgeführt, bei denen der anomale Transport unberücksichtigt blieb oder reduziert wurde. Zwar sind diese Rechnungen irrelevant, was den Vergleich mit experimentellen Daten angeht, jedoch sind sie nützlich um Effekte herauszuheben, die möglicherweise von dem anomalen Transport verschleiert werden. Als Referenz werden in Bild 5 die Ergebnisse einer Rechnung (Rechnung 3) abgebildet, die wie Rechnung 1 nur mit den Diagonalelementen der Transportmatrix durchgeführt wurde und bei der ebenfalls das elektrische Feld identisch gleich Null gesetzt wurde. Im Gegensatz zu Rechnung 1 wurde der anomale Transport vernachlässigt und deshalb gezwungenermaßen die Teilchennachfüllrate gesenkt, um den dadurch bedingten Anstieg der Dichte auszugleichen.

Tab. 3: Rechnung 3

$$\phi = 5 \cdot 10^{19} \text{s}^{-1}$$

Nichtdiagonal-Elemente : nicht verwendet

elektrisches Feld :  $E = 0$  ;  $n_e$

anomale Diffusion : nicht berücksichtigt

$$n(0) = 1.48 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3} ; T_e(0) = 1.48 \text{keV} ; T_i(0) = 0.31 \text{keV}$$

$$\langle n \rangle = 7.21 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} ; \langle T_e \rangle = 1.10 \text{keV} ; \langle T_i \rangle = 0.25 \text{keV}$$

$$\tau_E = 11.5 \text{ms} ; \tau_n = 56.9 \text{ms}$$

Charakteristisch für die Rechnungen ohne anomalen Transport ist es, daß das Dichte- und insbesondere das Elektronentemperaturprofil sich am Plasmarand aufsteilen. Dies steht im Widerspruch zu den Messwerten. Außerdem würden derart

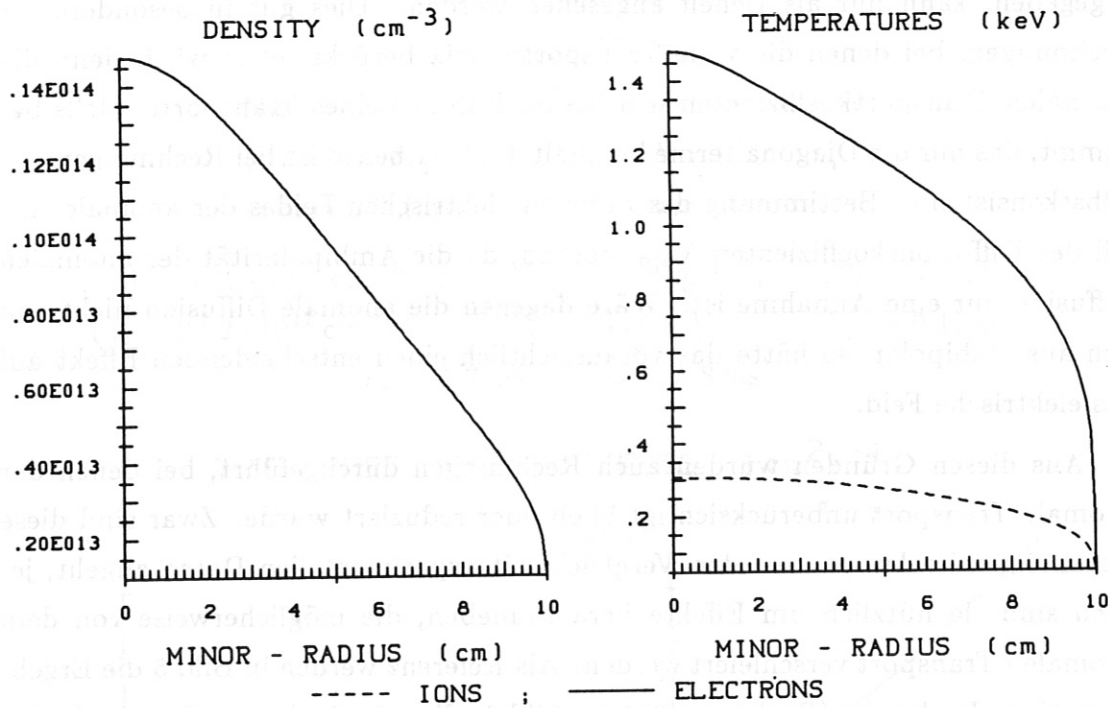


Abb. 5: Dichte- und Temperaturprofile einer Referenzrechnung ohne anomalen Transport (Rechnung 3)

große Gradienten mit hoher Wahrscheinlichkeit zu Instabilitäten Anlaß geben.

Das Auftreten dieser großen Gradienten ist im Rahmen dieser Rechnungen ohne anomalen Transport unvermeidbar. Denn sowohl der axialsymmetrische Anteil als auch der Rippel-Anteil der Transportkoeffizienten sind monotone Funktionen der Temperatur und Dichte. Folglich werden die Transportkoeffizienten mit sinkender Dichte und Temperatur kleiner. (Bei ansonsten unveränderten Bedingungen) Bild 6 zeigt die Transportkoeffizienten als Funktion des Radius, die zu Rechnung 3 gehören.

Bei der Interpretation dieser Plots muß beachtet werden, daß die durchgezogene Linie (mit "total" bezeichnet) den tatsächlich in der Rechnung verwendeten Transportkoeffizienten darstellt, also in diesem Fall  $\chi_{n,n} = \chi_{n_e,n_e}^{(axi)} + \chi_{n_e,n_e}^{(rpl)}$ . Dagegen werden für das Plotten des axisymmetrischen Anteils (gestrichelt) und des Rippel-Anteils (gestrichelt - gepunktelt) das arithmetische Mittel von Ionen- und Elektronenwert verwendet, also  $\chi_{n,n}^{(axi)} = \frac{1}{2}(\chi_{n_e,n_e}^{(axi)} + \chi_{n_i,n_i}^{(axi)})$  bzw.  $\chi_{n,n}^{(rpl)} = \frac{1}{2}(\chi_{n_e,n_e}^{(rpl)} + \chi_{n_i,n_i}^{(rpl)})$ . Dies hat den Vorteil, daß man aus dem Plot die Differenz von

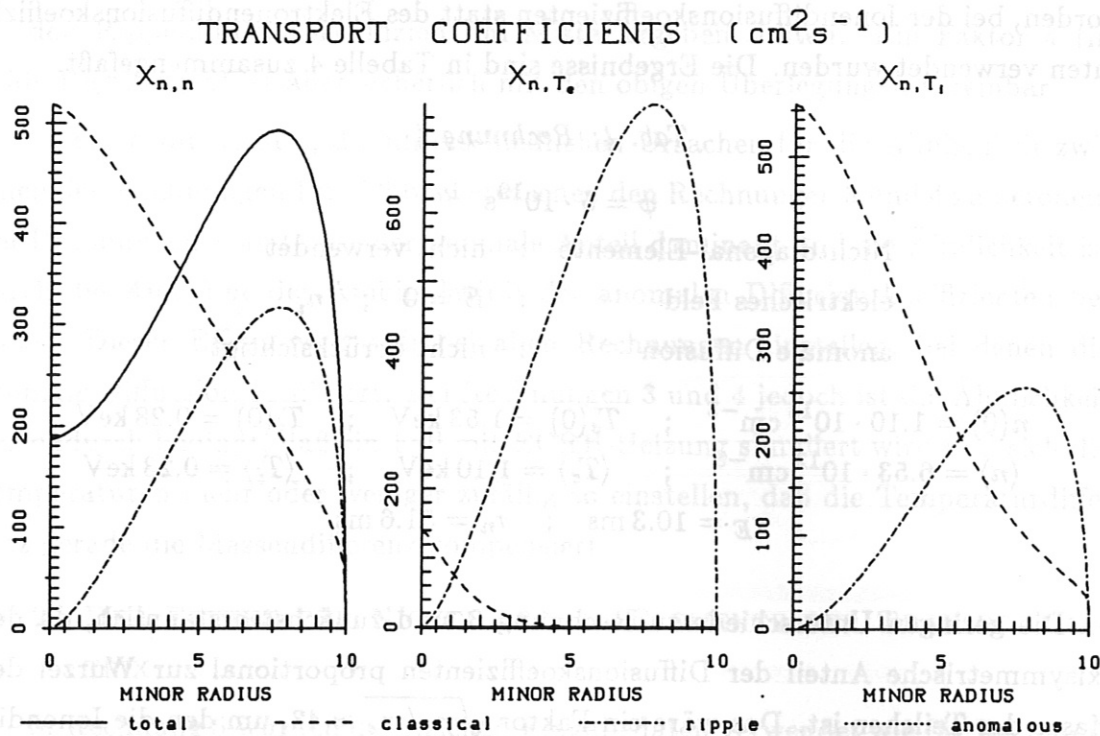


Abb. 6: Die Transportkoeffizienten der Dichtegleichung als Funktion des Radius zu Rechnung 3. (Die restlichen Transportkoeffizienten haben ähnliche Verläufe)

Ionen- und Elektronendiffusionskoeffizient abschätzen kann, da die gestrichelten Linien sich eben nicht zur durchgezogenen aufaddieren.

Der axisymmetrische Anteil der Transportkoeffizienten fällt über den Radius monoton; dies reflektiert seine Abhängigkeit von Dichte und Temperatur. Der Rippel-Anteil dagegen wächst zunächst an. Da der helikale Rippel im Stellarator W VII-A linear zum Rand hin anwächst ( $\epsilon_h = 0.024r/a$ ), ist dies auch zu erwarten. Jedoch sobald die Dichte- und Temperaturabhängigkeit darüber dominieren, kommt es zu einem rapiden Abfall. Denn kleinere Dichten und Temperaturen bedeuten kleinere Transportkoeffizienten. Dadurch wiederum sind die Gradienten groß, Dichte und Temperatur fallen noch schneller, was kleinere Transportkoeffizienten zur Folge hat usw. Der Prozess schaukelt sich also auf. Dem kann nur Einhalt geboten werden durch einen Term in den Transportkoeffizienten, der mit fallender Dichte bzw. Temperatur anwächst, wie dies bei den anomalen Transportkoeffizienten der Fall ist.

Auch zu dieser Rechnung (Rechnung 3) ist eine analoge Rechnung durchgeführt

worden, bei der Ionendiffusionskoeffizienten statt des Elektronendiffusionskoeffizienten verwendet wurden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 zusammengefaßt.

Tab. 4: Rechnung 4

$$\phi = 5 \cdot 10^{19} \text{s}^{-1}$$

Nichtdiagonal-Elemente	: nicht verwendet
elektrisches Feld	: $E = 0$ ; $n_i$
anomale Diffusion	: nicht berücksichtigt

$$n(0) = 1.10 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3} \quad ; \quad T_e(0) = 1.53 \text{keV} \quad ; \quad T_i(0) = 0.28 \text{keV}$$

$$\langle n \rangle = 6.53 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} \quad ; \quad \langle T_e \rangle = 1.10 \text{keV} \quad ; \quad \langle T_i \rangle = 0.23 \text{keV}$$

$$\tau_E = 10.3 \text{ms} \quad ; \quad \tau_n = 51.6 \text{ms}$$

Die geringen Unterschiede zu Rechnung 3 sind zunächst erstaunlich, da der axisymmetrische Anteil der Diffusionskoeffizienten proportional zur Wurzel der Masse der Teilchen ist. Das wäre ein Faktor  $\sqrt{m_i/m_e} \approx 43$ , um den die Ionendiffusion zumindest im Plasmazentrum größer sein müßte. Teilcheneinschlußzeiten von gleicher Größenordnung für beide Rechnungen scheinen ausgeschlossen.

Die Lösung dieses scheinbaren Widerspruches liegt darin, daß bei ECRH-geheizten Plasmen, wie sie durch diese Rechnung simuliert werden, die Ionentemperatur gegen die Elektronentemperatur klein ist. Es kann angenommen werden, daß der axisymmetrische Anteil des Diffusionskoeffizienten etwa wie  $T^{3/2}$  skaliert. Das ergibt einen Faktor von  $\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} \approx \left(\frac{0.28}{1.53}\right)^{3/2} \approx \frac{1}{13}$  bzw.  $\left(\frac{0.31}{1.48}\right)^{3/2} \approx \frac{1}{10}$ . Die Diffusionskoeffizienten sollten sich danach im Plasmazentrum um einen Faktor von etwa 3.4 bis 4.1 unterscheiden. Aus den numerischen Ergebnissen ergibt sich ein Faktor 4.0.

Dafür, daß auch dieser Faktor sich nicht in den Ergebnissen wie der zentralen Dichte oder der Teilcheneinschlußzeit widerspiegelt, ist der Rippel-Anteil verantwortlich. Die einzigen Terme, die in (II.15) eine Massenabhängigkeit einführen, sind  $\nu_j \propto m^{-1/2}$  und  $\omega^2$ . Bei  $\omega$  hängt es davon ab, welche der Frequenzen  $\omega_d, \omega_s, \omega_p$  und  $\omega_\nu$  in der Summe dominiert. Für  $\omega_d, \omega_s$  dominant ergibt sich  $\chi^{(rpl)} \propto m^{-1/2}$ ; für  $\omega_p$  dominant ist  $\chi^{(rpl)}$  unabhängig von  $m$  und für  $\omega_\nu$  dominant erhält man eine  $\chi^{(rpl)} \propto \sqrt{m}$  Abhängigkeit. Diese komplexe Abhängigkeit macht es so gut wie aussichtslos, die Unterschiede abschätzen zu wollen, die sich



für den Rippeldiffusionskoeffizient im Mittel ergeben sollten. Ein Faktor 4 (in beide Richtungen) ist aber sicherlich mit den obigen Überlegungen vereinbar.

Es erscheint wichtig, die unterschiedlichen Ursachen für die Ähnlichkeit zwischen den Rechnungen 1 und 2 bzw. zwischen den Rechnungen 3 und 4 zu betonen. Bei Rechnungen 1 und 2 ist der anomale Anteil dominant und die Ähnlichkeit ist durch die *Annahme* der Ambipolarität der anomalen Diffusionskoeffizienten bedingt. Dieser Effekt wird sich bei allen Rechnungen einstellen, bei denen die anomale Diffusion dominiert. Bei Rechnungen 3 und 4 jedoch ist die Ähnlichkeit nur dadurch bedingt, daß ein Fall mit ECRH-Heizung simuliert wird und sich die Temperaturen mehr oder weniger zufällig so einstellen, daß die Temperaturdifferenz gerade die Massendifferenz kompensiert.

#### IV.2. DER EFFEKT DER NICHTDIAGONAL-ELEMENTE DER TRANSPORTMATRIX

In Rechnung 5 wurden die gleichen Eingabedaten verwendet wie für Rechnung 1 mit Ausnahme der dazugekommenen Nichtdiagonal-Elemente der Transportmatrix.

Tab. 5: Rechnung 5

$$\phi = 1.5 \cdot 10^{20} \text{s}^{-1}$$

Nichtdiagonal-Elemente : verwendet

elektrisches Feld :  $E = 0$  ;  $n_e$

anomale Diffusion : berücksichtigt

$$n(0) = 7.45 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} ; T_e(0) = 0.84 \text{keV} ; T_i(0) = 0.16 \text{keV}$$

$$\langle n \rangle = 2.36 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} ; \langle T_e \rangle = 0.47 \text{keV} ; \langle T_i \rangle = 0.15 \text{keV}$$

$$\tau_E = 1.7 \text{ms} ; \tau_n = 6.2 \text{ms}$$

Am stärksten betroffen sind die Ergebnisse für die Iontemperatur. Die Iontemperatur im Plasmazentrum fällt um 36%, der Mittelwert immerhin noch um 25%. Die Elektronentemperatur dagegen bleibt nahezu konstant: Zentral- und Mittelwert fallen um je 2 Prozent.

Fast wichtiger als diese quantitativen Unterschiede erscheint die Beobachtung, daß das Profil der Iontemperatur schwach invertiert ist, also zunächst zum Rande hin ansteigt, bevor es zum Randwert hin abfällt.

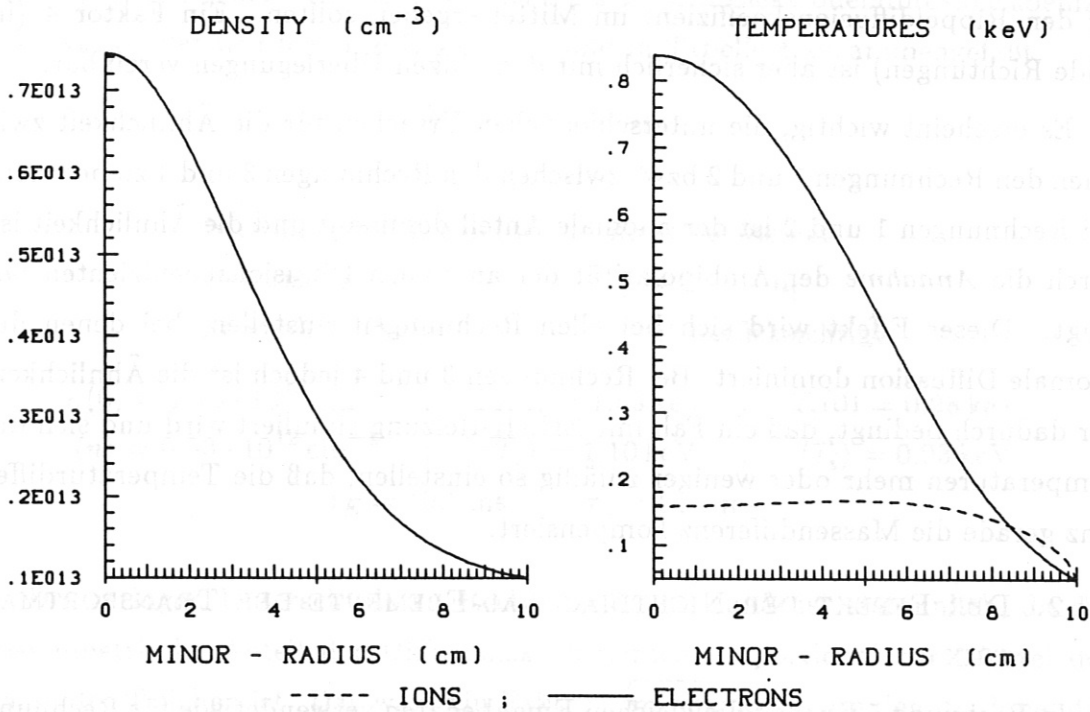


Abb. 7: Dichte- und Temperaturprofile nach Hinzunahme der Nichtdiagonal-Elemente (Rechnung 5)

Dies ist ein qualitativ vollkommen neues Ergebnis; es ist mit einem diagonalen Transportmodell prinzipiell unvereinbar. Denn die Richtung des Energieflusses ist immer auswärts. Wenn nur die Wärmeleitung betrachtet wird, folgt daraus notwendigerweise, daß die Temperatur zum Plasmarand hin abfällt, da die Energieverluste (Senken) die Heizleistung im Zentrum sicherlich nicht übertreffen.

Diese invertierten Profile erscheinen nach wie vor mit experimentellen Daten innerhalb der Messfehler vereinbar zu sein. Es gibt sogar Anzeichen dafür, daß die mit der Invertierung der Profile verbundene Verbreiterung eine bessere Übereinstimmung mit experimentellen Daten ergeben könnte [24]. In einem anderen Stellarator sind Profile gemessen worden, die eindeutig invertiert waren [25].

Die Invertierung läßt sich am einfachsten verstehen, wenn man die Energieflüsse gemäß

$$\Gamma_{T_j} = \chi_{T_j, n} \frac{dn}{dr} + \chi_{T_j, T_j} \frac{dT_j}{dr}$$

aufspaltet (siehe Bild 8).

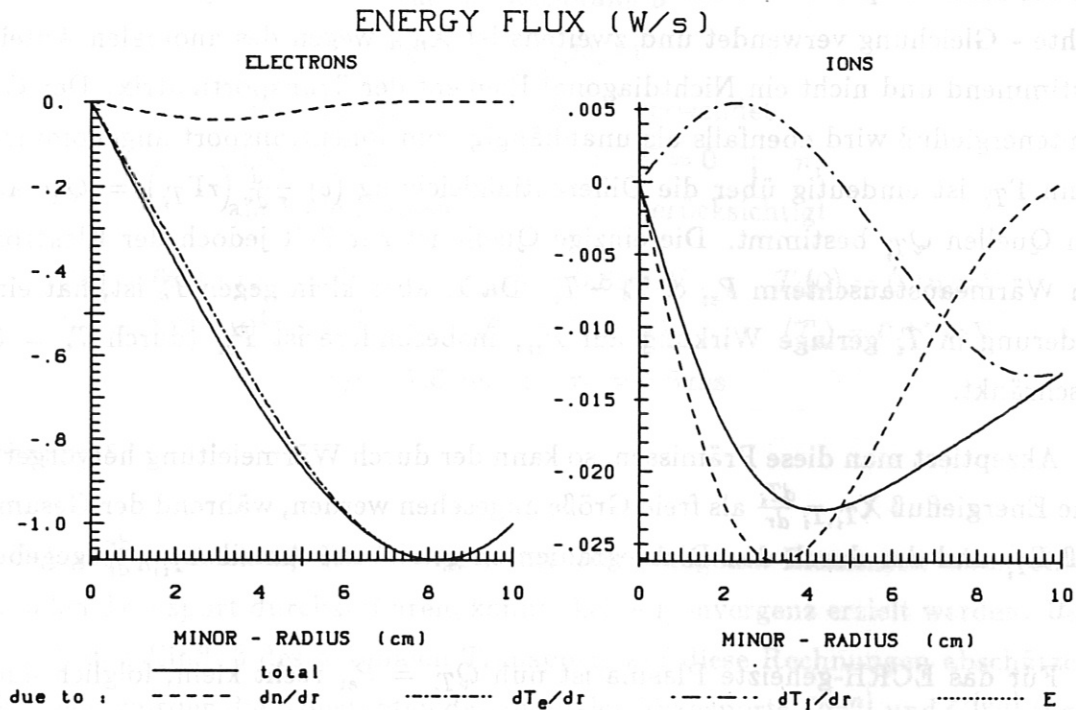


Abb. 8: Zusammensetzung der Ionen- und Elektronenenergieflüsse bei Rechnung 5

Als eine Folge der Simulation von ECRH-geheizten Plasmen wird der Energietransport vornehmlich über die Elektronen abgewickelt.  $\Gamma_{T_e}$  ist mehr als vierzig mal so groß wie  $\Gamma_{T_i}$ . Deshalb hat der durch den Dichtegradienten getriebene Energietransport für Elektronen und Ionen höchst unterschiedliche Bedeutung, obwohl er in absoluten Zahlen fast gleich groß ist.

Bei den Elektronen ist er fast vernachlässigbar. Das liegt auch daran, daß der Wärmeleitungskoeffizient  $\chi_{T_e, T_e}$  durch den anomalen Anteil sehr viel größer ist als der Nichtdiagonal-Term  $\chi_{T_e, n}$ . Bei halben Radius 50 mal größer, am Plasmarand sogar 50 000 mal.

Bei den Ionen jedoch dominiert der durch den Dichtegradienten getriebene Energietransport. Die Ursache liegt jetzt aber nicht daran, daß  $\chi_{T_i, n}$  größer als  $\chi_{T_i, T_i}$  wäre — das Gegenteil ist der Fall — sondern daran, daß der Dichtegradient  $\frac{1}{n} \frac{dn}{dr}$  groß gegen den Ionentemperaturgradienten  $\frac{1}{T_i} \frac{dT_i}{dr}$  ist.

Bei nichtlinear koppelnden Systemen ist es in der Regel unzulässig mit kausalen Ketten zu argumentieren. In diesem Fall scheint es jedoch gerechtfertigt wie folgt zu schließen. Der Teilchentransport ist im wesentlichen unabhängig vom Verhal-

ten der Ionentemperatur. Denn erstens wurde für diese Rechnung die Elektronendichte - Gleichung verwendet und zweitens ist  $\chi_{n,n}$  wegen des anomalen Anteils bestimmend und nicht ein Nichtdiagonal-Element der Transportmatrix. Der Gesamtenergiefluß wird ebenfalls als unabhängig vom Ionentransport angenommen. Denn  $\Gamma_{T_i}$  ist eindeutig über die Differentialgleichung  $(c) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Gamma_{T_i}) = Q_{T_i}$  aus den Quellen  $Q_{T_i}$  bestimmt. Die einzige Quelle ist zur Zeit jedoch der Elektron-Ion Wärmeaustauschterm  $P_{ei} \propto T_e - T_i$ . Da  $T_i$  aber klein gegen  $T_e$  ist, hat eine Änderung in  $T_i$  geringe Wirkung auf  $P_{ei}$ ; insbesondere ist  $P_{ei}$  (durch  $T_i = 0$ ) beschränkt.

Akzeptiert man diese Prämissen, so kann der durch Wärmeleitung hervorgerufene Energiefluß  $\chi_{T_i, T_i} \frac{dT_i}{dr}$  als freie Größe angesehen werden, während der Gesamtfluß  $\Gamma_{T_i}$  und der durch den Dichtegradienten getriebene Anteil  $\chi_{T_i, n} \frac{dn}{dr}$  gegeben sind.

Für das ECRH-geheizte Plasma ist nun  $Q_{T_i} = P_{ei}$  recht klein, folglich auch  $\Gamma_{T_i}$ . Der vom Dichtegradient getriebene Teil ist jedoch von der Art der Heizung unabhängig und kann daher - wie hier -  $\Gamma_{T_i}$  übertreffen. Als Konsequenz muß sich ein invertiertes Ionentemperaturprofil einstellen, damit dies durch die Wärmeleitung ausgeglichen wird. Durch den Massentransport wird also so viel Energie an den Plasmarand geführt, daß durch die gewöhnliche Wärmeleitung die Energie zum Teil wieder zum Zentrum zurückgeführt werden muß, damit die Energiebilanz stimmt.

Eine zu Rechnung 2 analoge Rechnung, bei der die Ionen- statt der Elektronengleichung zur Dichtebilanz verwendet wurde, ist selbstverständlich ebenfalls durchgeführt worden. Die Profile sehen den von Bild 7 sehr ähnlich, weswegen die Ergebnisse nur in Tabellenform (Tabelle 6) zusammengefaßt sind.

Das zu Rechnung 5 Gesagte trifft im wesentlichen auch hier zu. Auffallend ist lediglich, daß durch Hinzunahme der Nichtdiagonal-Terme die Dichte sogar gestiegen ist. Das ist durch die Inversion des Ionentemperaturprofils bedingt. Denn durch das ansteigende Profil ist nicht nur die Ionenwärmeleitung, sondern auch die Ionen-Thermodiffusion nach innen gerichtet. (Thermodiffusion ist die durch den Temperaturgradienten getriebene Diffusion). Entsprechend dem flacheren Profil der Ionentemperatur ist der Zuwachs auch schwächer ausgeprägt als der Abfall in



Tab. 6: Rechnung 6

$$\phi = 1.5 \cdot 10^{20} \text{s}^{-1}$$

Nichtdiagonal-Elemente : verwendet  
 elektrisches Feld :  $E = 0$  ;  $n_i$   
 anomale Diffusion : berücksichtigt

$$n(0) = 6.51 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} ; T_e(0) = 0.85 \text{keV} ; T_i(0) = 0.16 \text{keV}$$

$$\langle n \rangle = 2.21 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} ; \langle T_e \rangle = 0.46 \text{keV} ; \langle T_i \rangle = 0.15 \text{keV}$$

$$\tau_E = 1.6 \text{ms} ; \tau_n = 5.8 \text{ms}$$

Rechnung 5.

Bei den Versuchen, Rechnungen mit Nichtdiagonal-Elementen aber ohne anomalen Transport durchzuführen, konnte keine Konvergenz erzielt werden. Um dennoch den Einfluß des anomalen Transports auf diese Rechnungen abschätzen zu können, wurden die Konstanten des anomalen Transports  $D^{(an)}$  und  $C^{(an)}$  (vgl. (II.20)) reduziert. Dies war so weit möglich, bis der anomale Anteil der Transportkoeffizienten nur noch in den äußersten zwei bis drei Millimetern des Plasmas einen Einfluß hatte.

Ein Ziel dieser Rechnungen war es herauszufinden, ob die Nichtdiagonal-Elemente der Transportmatrix den anomalen Transport — zumindest zu einem Teil — erklären. Das Gegenteil ist jedoch der Fall. Nach wie vor treten am Plasmarand steile Gradienten auf. Zusätzlich können jedoch die Profile so stark invertieren, daß sie experimentellen Daten krass widersprechen; siehe Bild 9.

Tab. 7: Rechnung 7

$$\phi = 1 \cdot 10^{20} \text{s}^{-1}$$

Nichtdiagonal-Elemente : verwendet  
 elektrisches Feld :  $E = 0$  ;  $n_e$   
 anomale Diffusion : reduziert  $D^{(an)} = 4 \cdot 10^7 \text{erg}^{2/3}/\text{cm s}$   
 $C^{(an)} = 2 \cdot 10^8 \text{erg}^{2/3}/\text{cm s}$

$$n(0) = 4.42 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} ; T_e(0) = 1.80 \text{keV} ; T_i(0) = 0.10 \text{keV}$$

$$\langle n \rangle = 8.73 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-3} ; \langle T_e \rangle = 2.19 \text{keV} ; \langle T_i \rangle = 0.11 \text{keV}$$

$$\tau_E = 2.4 \text{ms} ; \tau_n = 3.4 \text{ms}$$

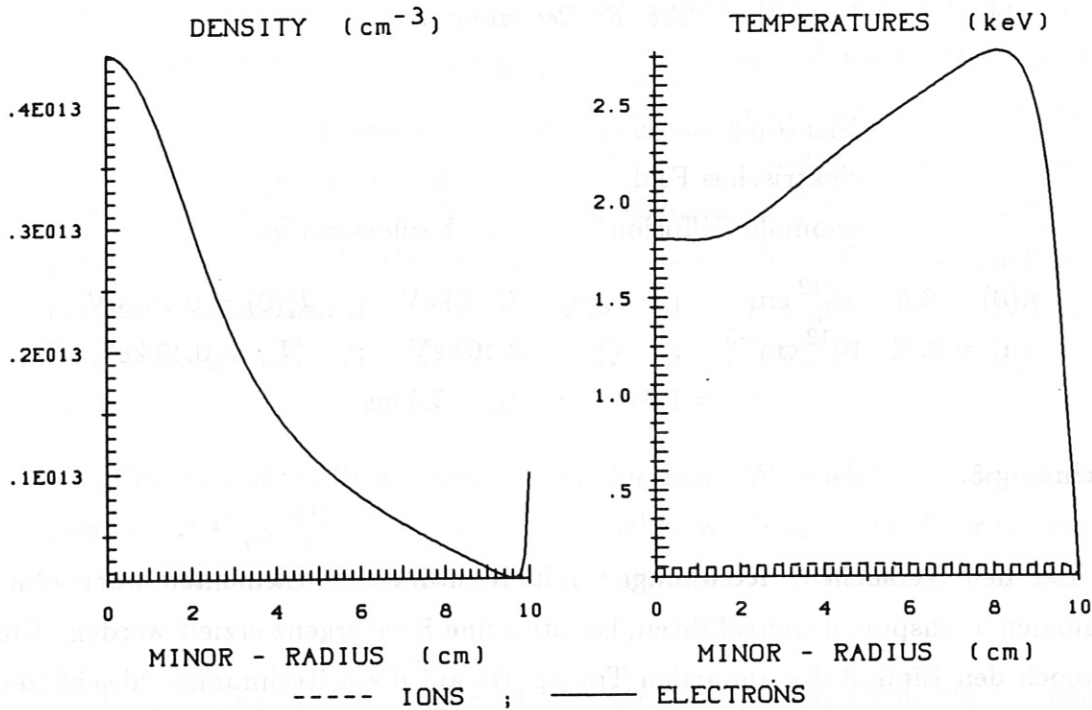


Abb. 9: Dichte- und Temperaturprofile einer Rechnung mit Nichtdiagonal-Termen und reduziertem anomalen Transport (Rechnung 7)

Dieses Ergebnis zeigt deutlich, daß Rechnungen ohne anomalen Transport nicht sinnvoll sind. Man beachte insbesondere die Inversion des Dichteprofiles am Plasmarand! Erwähnenswert ist, daß dies nicht durch die Randbedingungen verursacht ist, wie man zunächst vermuten könnte. Auch wenn der Randwert der Dichte stark abgesenkt wird, bleibt die Inversion deutlich ausgeprägt.

Es lohnt sich nicht, näher auf dieses Ergebnis einzugehen, da es physikalisch belanglos ist. Erwähnenswert ist aber, daß nun deutliche Unterschiede zutage treten zwischen Rechnungen mit Elektronendichtegleichung und Ionendichtegleichung. Bei letzteren sind die Temperaturprofile nicht mehr invertiert; die Inversion des Dichteprofiles am Plasmarand bleibt aber abgeschwächt erhalten. Die Profile ähneln stark denen von Bild 5. Der Vollständigkeit halber sind die Ergebnisse in Tabelle 8 angegeben. Man beachte den Unterschied in den Einschlußzeiten zu Rechnung 7.

Tab. 8: Rechnung 8

	$\phi = 1 \cdot 10^{20} \text{s}^{-1}$
Nichtdiagonal-Elemente	: verwendet
elektrisches Feld	: $E = 0$ ; $n_i$
anomale Diffusion	: reduziert $D^{(an)} = 3 \cdot 10^6 \text{erg}^{2/3}/\text{cm s}$ $C^{(an)} = 2 \cdot 10^7 \text{erg}^{2/3}/\text{cm s}$
$n(0) = 1.49 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$	; $T_e(0) = 1.33 \text{keV}$ ; $T_i(0) = 0.25 \text{keV}$
$\langle n \rangle = 7.69 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3}$	; $\langle T_e \rangle = 0.98 \text{keV}$ ; $\langle T_i \rangle = 0.22 \text{keV}$
$\tau_E = 11.0 \text{ms}$	; $\tau_n = 30.4 \text{ms}$

#### IV.3. RECHNUNG MIT VERÄNDERTER RANDBEDINGUNG

Die Vorstellung die diesen Randbedingungen zu Grunde liegt, ist die, daß ein Teilchen, wenn es den Plasmarand überschreitet, seine kinetische Energie  $\frac{2}{3}kT$  mit sich abführt. Das führt zu der in (II.32) angegebenen Beziehung zwischen Teilchen- und Energiefluß am Plasmarand. (siehe auch Punkt "Randbedingungen" in der Tabelle zu Rechnung 9) Um bei Rechnungen mit diesen Randbedingungen physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten, muß ein sehr großer Energieverlust der Elektronen am Plasmarand, z. B. durch Strahlung, angenommen werden. Die Ergebnisse von Rechnungen mit Randbedingungen (II.32) sehen dann so aus:

Tab. 9: Rechnung 9

	$\phi = 1.5 \cdot 10^{20} \text{s}^{-1}$
Nichtdiagonal-Elemente	: nicht verwendet
elektrisches Feld	: $E = 0$ ; $n_e$
anomale Diffusion	: berücksichtigt
Strahlungsverluste	: $P_{rad} = 79 \text{kW}$
Randbedingungen	: $n(a) = 1 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3}$ $\Gamma_{T_e} = \frac{3}{2}kT_e\Gamma_n$ ; $\Gamma_{T_i} = \frac{3}{2}kT_i\Gamma_n$
$n(0) = 5.96 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3}$	; $T_e(0) = 0.53 \text{keV}$ ; $T_i(0) = 0.20 \text{keV}$
$\langle n \rangle = 1.81 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3}$	; $\langle T_e \rangle = 0.24 \text{keV}$ ; $\langle T_i \rangle = 0.14 \text{keV}$
$\tau_E = 64.4 \text{ms}$	; $\tau_n = 4.8 \text{ms}$
$T_e(a) = 24 \text{eV}$	; $T_i(a) = 3.6 \text{eV}$

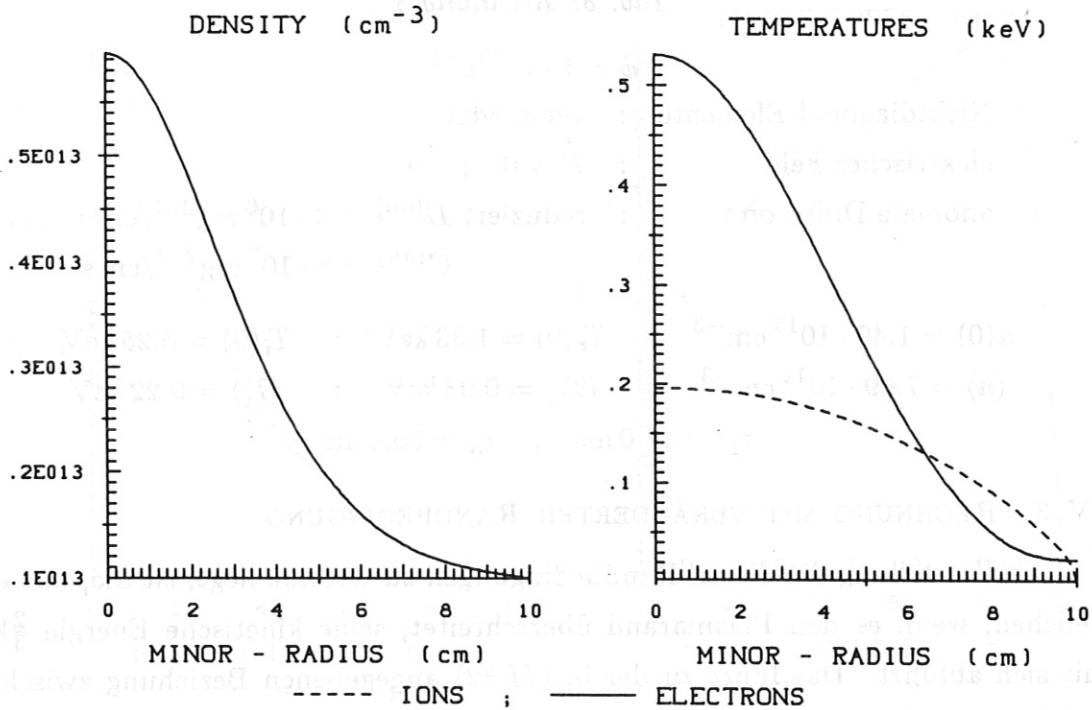


Abb. 10: Dichte- und Temperaturprofile einer Rechnung mit veränderten Randbedingungen (Rechnung 9)

Der Grund, warum ein so hoher Verlust bei den Elektronen angenommen werden muß, liegt darin, daß für diese Rechnungen die Profile für Heizung  $Q_{T_i}$  und Teilchennachfüllrate  $Q_n$  (siehe Kap. II.4) weitgehend fest als Funktionen des Radius vorgegeben sind. Deshalb sind auch die Flüsse  $\Gamma_{T_e}, \Gamma_{T_i}, \Gamma_n$  schon durch die Gleichungen (II.7) weitgehend eindeutig festgelegt. Infolgedessen haben die Randbedingungen (II.32) doch fast den Charakter einer festen Vorgabe der Randtemperaturen durch

$$T_e = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\Gamma_{T_e}}{\Gamma_n} \quad (IV.1)$$

$$T_i = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\Gamma_{T_i}}{\Gamma_n}$$

Dies wird lediglich durch den Energieaustauschterm  $P_{ei}$  durchbrochen, der auf  $\Gamma_{T_e}$  und  $\Gamma_{T_i}$  Einfluß hat.

Wie schon früher festgestellt, ist bei ECRH-geheizten Plasmen der Energiefluß der Ionen sehr viel kleiner als der der Elektronen. Nach Gleichungen (IV.1) wäre damit auch  $T_i$  etwa vierzig mal kleiner als  $T_e$ .



Durch die Einführung der Strahlungsverluste am Plasmarand erreicht man, daß die Energie der Elektronen nicht mehr den Plasmarand erreicht, da sie schon vorher abgestrahlt wird. Mit anderen Worten, es wird  $\Gamma_{T_e}$  am Rand reduziert.

Die angenommenen Verluste sind tatsächlich sehr groß; 79 kW bei 80 kW Gesamtheizleistung. Es kann bezweifelt werden, ob dies der physikalischen Realität entspricht; die Frage wird jedoch erst dann endgültig beantwortbar sein, wenn physikalische Modelle für die Quellterme  $Q_n, Q_{T_e}, Q_{T_i}$  eingeführt worden sind. Wenn diese keine hohen Verluste für die Elektronen am Plasmarand zulassen — durch Strahlung oder andere Prozesse —, müssen die den Randbedingungen zugrundeliegenden Vorstellungen neu überdacht und modifiziert werden.

Der auffällig hohe Wert für die Energieeinschlußzeit  $\tau_E$  sollte nicht mit den Ergebnissen der übrigen Rechnungen verglichen werden. Denn wegen der Definition von  $\tau_e$  als "Energieinhalt durch Energiefluß am Plasmarand" wird die abgestrahlte Energie nicht als Verlust berücksichtigt.

#### IV.4. EFFEKT DES SELBSTKONSISTENT BERECHNETEN RADIALEN ELEKTRISCHEN FELDES

Die Ergebnisse der Rechnungen mit selbstkonsistent berechnetem radialem elektrischen Feld entsprechen den Erwartungen. Durch das elektrische Feld werden die Bahnen der im helikalen Rippel gefangenen Teilchen so verändert, daß vermehrt nahezu geschlossene Bahnen auftreten. Der durch den Rippel verursachte Transport wird reduziert, das Einschlußverhalten verbessert sich.

Tab. 10: Rechnung 10

$$\phi = 1.5 \cdot 10^{20} \text{s}^{-1}$$

Nichtdiagonal-Elemente : nicht verwendet

elektrisches Feld : selbstkonsistent

anomale Diffusion : berücksichtigt

$$n(0) = 8.44 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} ; T_e(0) = 0.92 \text{keV} ; T_i(0) = 0.47 \text{keV}$$

$$\langle n \rangle = 2.48 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} ; \langle T_e \rangle = 0.51 \text{keV} ; \langle T_i \rangle = 0.36 \text{keV}$$

$$\tau_E = 2.6 \text{ms} ; \tau_n = 6.5 \text{ms}$$

Dieses Verhalten ist am deutlichsten bei der Ionentemperatur ausgeprägt; bei der Dichte und der Elektronentemperatur wird es durch den anomalen Transport

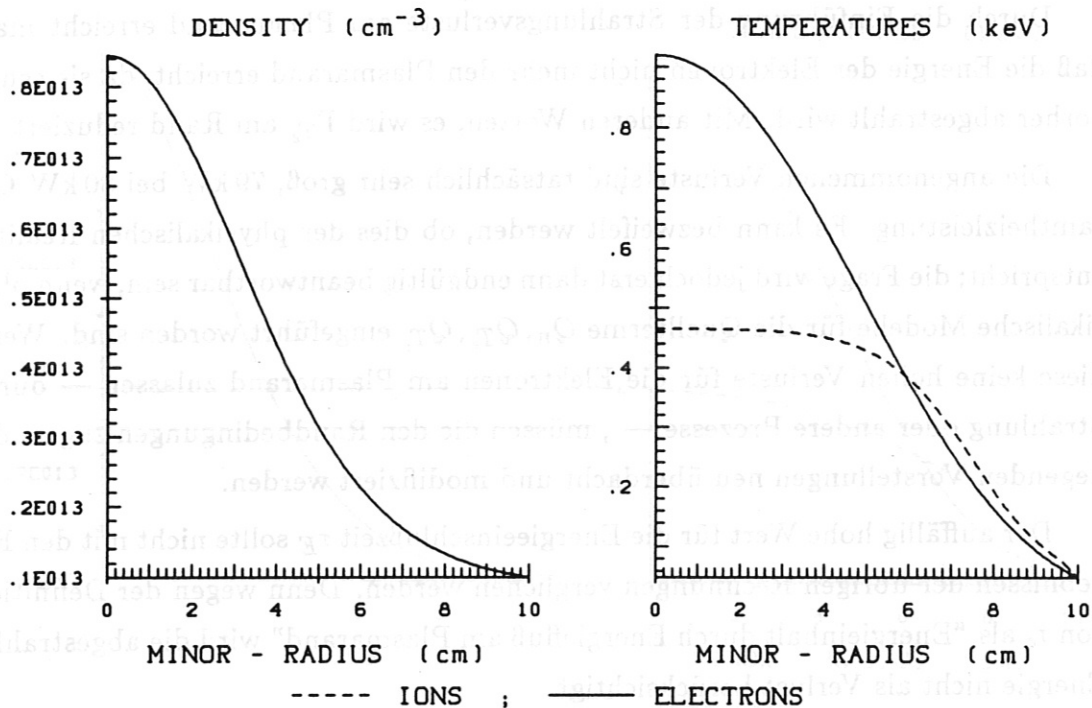


Abb. 11: Dichte- und Temperaturprofile einer Rechnung mit selbstkonsistent berechnetem elektrischen Feld (Rechnung 10)

überdeckt. Dieser ist ja als unabhängig vom elektrischen Feld angenommen worden.

Die Verbesserung des Energieeinschlusses der Ionen ist sogar so gut, daß die Ionentemperatur auf Werte ansteigt, die deutlich über gemessenen Werten liegen. In diesen Rechnungen wurden jedoch keinerlei Verlustmechanismen für die Ionen berücksichtigt. Ein solcher wäre zum Beispiel Stöße mit Neutralgas, bei denen das Elektron ausgetauscht wird. Es entsteht ein "heißes" Neutralgasteilchen und ein "kaltes" Ion bleibt zurück. Da der Energietransport hauptsächlich über die Elektronen abgewickelt wird, können schon relativ kleine Verluste bei den Ionen deutliche Veränderungen bei der Ionentemperatur bewirken.

Das selbstkonsistent berechnete Feld ist in Bild 12 dargestellt. Sowohl die absoluten Werte von circa 100 V/cm Maximum als auch das Profil stimmt mit experimentellen Daten von W VII-A qualitativ überein. [26]

Die Auswirkungen des radialen elektrischen Feldes können an den Transport-

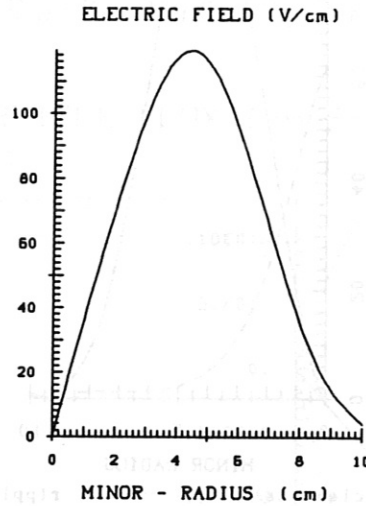


Abb. 12: Profil des selbstkonsistent berechneten elektrischen Feldes bei Rechnung 10

koeffizienten der Dichtegleichung  $\chi_{n,n}$ ,  $\chi_{n,T_e}$  und  $\chi_{n,T_i}$  exemplarisch aufgezeigt werden. Zum Vergleich werden die Transportkoeffizienten von Rechnung 1 und Rechnung 10 gegenübergestellt.

Die Reduktion der Rippeltransportkoeffizienten beträgt für die Elektronen ( $\chi_{n,T_e}$ ) bis zu 50%. Bei den Ionen dagegen fällt der Transportkoeffizient bei  $r = 7$  cm sogar auf das Sechzigstel des ursprünglichen Wertes.

Der stärkere Abfall der Ionentransportkoeffizienten ist zu verstehen, wenn man beachtet, daß wegen des Massenunterschiedes die Ionenstoßfrequenz  $\nu_i$  um den Faktor  $\sqrt{m_i/m_e} \approx 42$  kleiner ist als die Elektronenstoßfrequenz  $\nu_e$ . Somit sind auch die Frequenzen  $\omega_p$  und  $\omega_\nu$  in Gleichung (II.16) für die Ionen kleiner als für die Elektronen. Infolgedessen hat die Veränderung von  $\omega_d$  — durch das neu dazugekommene  $\omega_E$  — in der Summe  $\omega^2 = \omega_d^2 + \omega_s^2 + \omega_p^2 + \omega_\nu^2$  größere Auswirkung bei den Ionen.

Beim Vergleich der Ionentransportkoeffizienten ohne und mit elektrischem Feld muß auch beachtet werden, daß durch die erhöhte Iontemperatur (im Fall mit

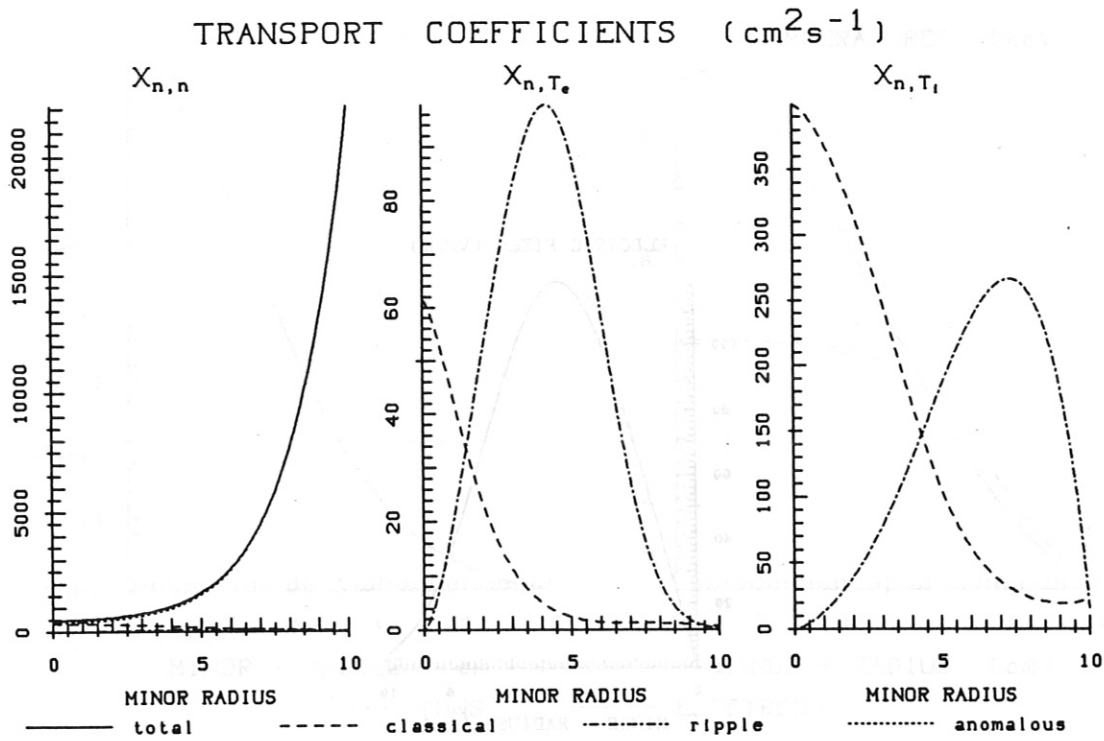


Abb. 13: Transportkoeffizienten der Dichte Gleichung als Funktion des Radius für die Referenzrechnung (Rechnung 1)

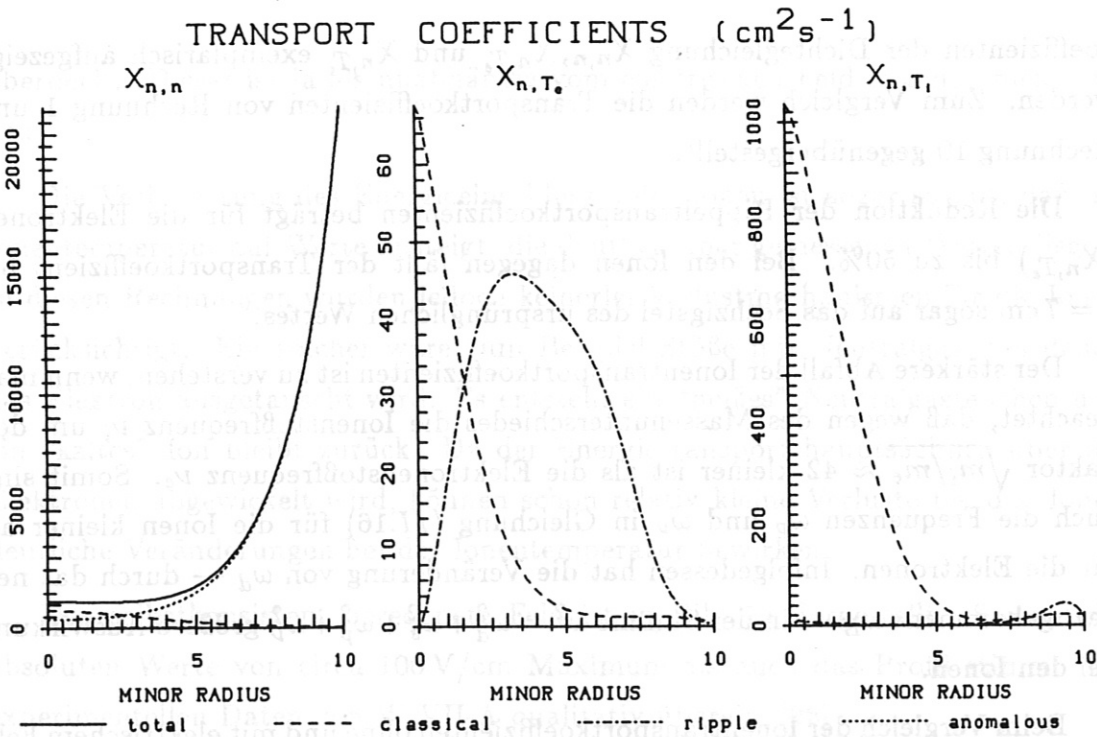


Abb. 14: Transportkoeffizienten der Dichte Gleichung als Funktion des Radius für die Rechnung mit selbstkonsistent bestimmtem elektrischen Feld (Rechnung 10)



elektrischem Feld) der axialsymmetrische Anteil der Ionentransportkoeffizienten gestiegen ist.

Das elektrische Feld beeinflusst den Transport nicht nur indirekt durch Verändern der Transportkoeffizienten sondern auch direkt durch die jetzt dazugekommenen Terme  $\chi_{n,\phi} \cdot E$  im Teilchenfluß  $\Gamma_n$ , wie in Bild 15 dargestellt.

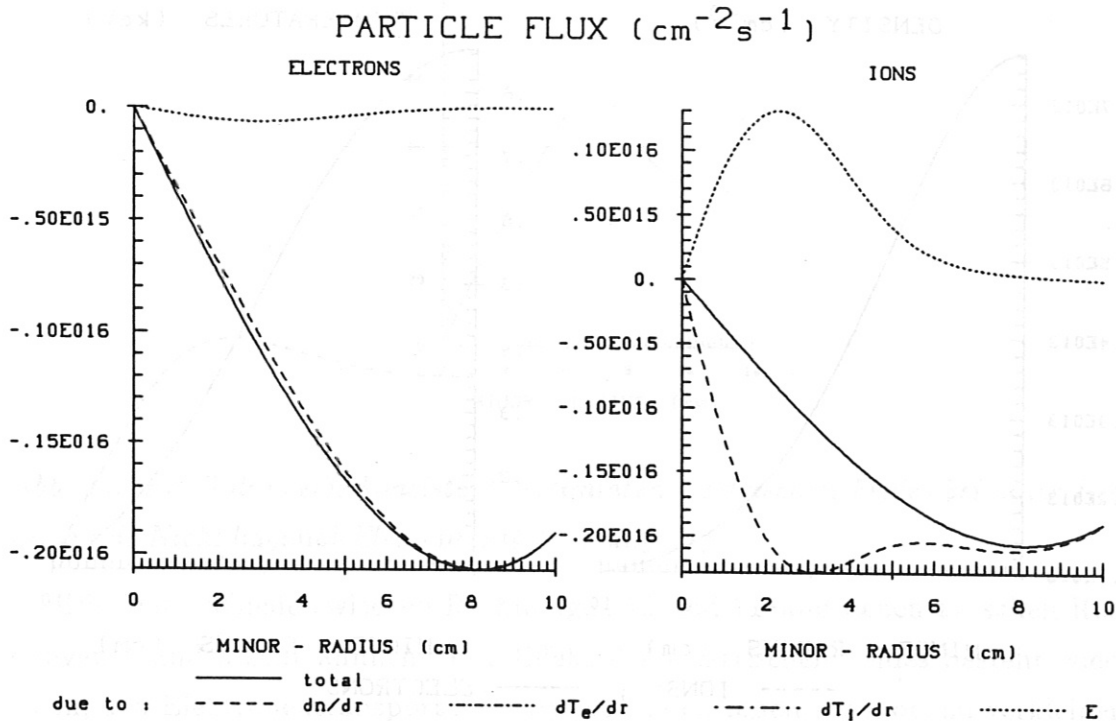


Abb. 15: Auswirkung des elektrischen Feldes auf Ionen- und Elektronenteilchenfluß (Rechnung 10)

Der Gesamtteilchenfluß ist für Ionen und Elektronen natürlich gleich, die Zusammensetzung ist dagegen sehr unterschiedlich. Wegen des unterschiedlichen Vorzeichens der Ladung wird der Elektronentransport vergrößert, der Ionentransport dagegen reduziert. Da der Ionentransportkoeffizient  $\chi_{n_i,\phi}$  größer als der Elektronentransportkoeffizient ist, werden die Ionen stärker zurückgehalten als die Elektronen beschleunigt. Der durch das elektrische Feld erzeugte Fluß nach innen ist bis zum Radius von circa 2 cm größer als der resultierende Gesamtfluß! Am Plasmarand muß der Einfluß des elektrischen Feldes wieder vernachlässigbar werden, da in  $\chi_{n_j,\phi}$  kein anomaler Anteil berücksichtigt ist, im Gegensatz zu

$\chi_{n_j, n_j}$ .

Bei der Hinzunahme von Nichtdiagonal-Elementen zu dieser Rechnung ergibt sich eine Überlagerung der Effekte, die soeben und im Abschnitt IV.2 beschrieben wurden.

Das Ergebnis:

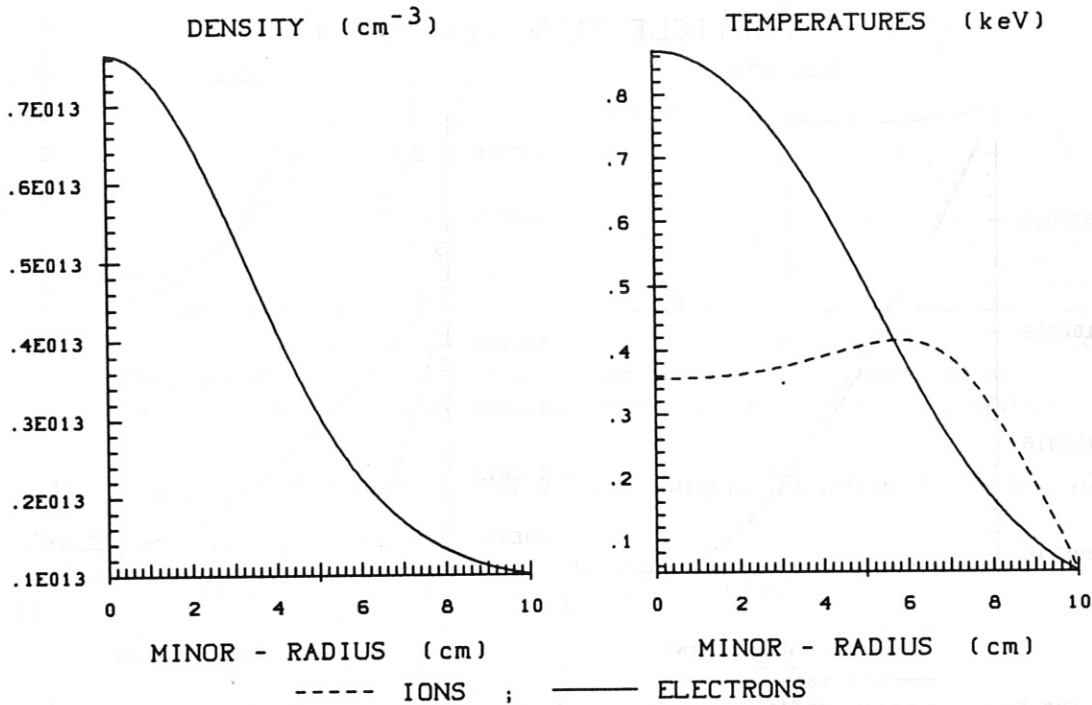


Abb. 16: Dichte- und Temperaturprofile einer Rechnung mit selbstkonsistent bestimmtem elektrischen Feld und Nichtdiagonal-Elementen (Rechnung 11)

Tab. 11: Rechnung 11

$$\phi = 1.5 \cdot 10^{20} \text{s}^{-1}$$

Nichtdiagonal-Elemente : verwendet

elektrisches Feld : selbstkonsistent

anomale Diffusion : berücksichtigt

$$n(0) = 7.64 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} \quad ; \quad T_e(0) = 0.87 \text{ keV} \quad ; \quad T_i(0) = 0.36 \text{ keV}$$

$$\langle n \rangle = 2.39 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} \quad ; \quad \langle T_e \rangle = 0.48 \text{ keV} \quad ; \quad \langle T_i \rangle = 0.35 \text{ keV}$$

$$\tau_E = 2.4 \text{ ms} \quad ; \quad \tau_n = 6.3 \text{ ms}$$

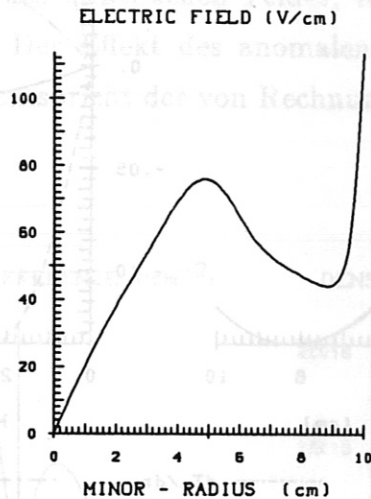


Abb. 17: Profil des selbstkonsistent bestimmten elektrischen Feldes bei einer Rechnung mit Nichtdiagonal-Elementen (Rechnung 11)

Die Unterschiede zwischen Rechnungen 10 und 11 sind denen zwischen Rechnungen 1 und 5 sehr ähnlich. Der Effekt des elektrischen Feldes besteht wieder darin, den Elektronentransport zu vergrößern, den Ionentransport zu verkleinern. Dies gilt jetzt auch für den Wärmetransport (siehe Bild 18).

Damit ist erklärt, warum die Absenkung der Temperatur bei Hinzunahme der Nichtdiagonal-Elemente prozentual bei den Elektronen größer und bei den Ionen kleiner ist, wenn man das elektrische Feld berücksichtigt.

Im Gegensatz zu Rechnung 10 fällt hier das elektrische Feld zum Plasmarand hin nicht ab. Wir führen das darauf zurück, daß bei dieser Rechnung auch Temperaturgradienten in die Ambipolaritätsgleichung eingehen.

Die Gradienten von Dichte und Elektronentemperatur sind am Plasmarand klein gegen den Ionentemperaturgradienten. Deshalb ist am Plasmarand das elektrische Feld hauptsächlich durch den Ionentemperaturgradienten bestimmt, denn alle anderen Terme, die in die Ambipolaritätsbedingung eingehen, sind deshalb klein gegen den zum Ionentemperaturgradienten proportionalen Term. Sind dage-

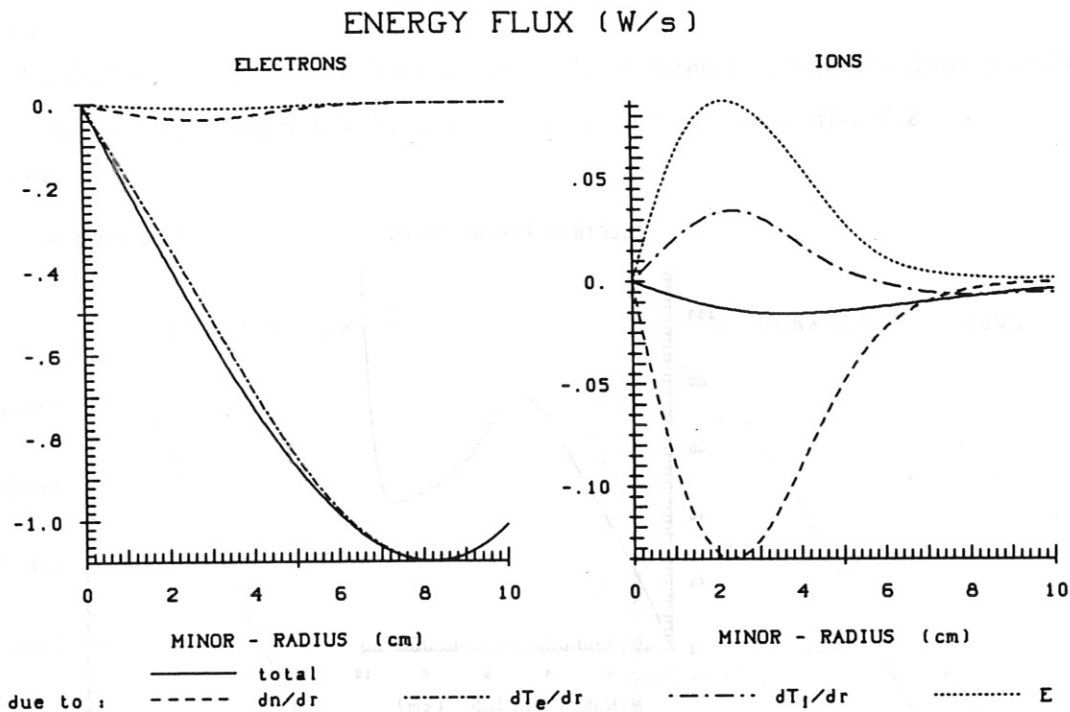


Abb. 18: Die Zusammensetzung des Energietransports der Ionen und Elektronen bei Rechnung 11

gen die Temperaturgradienten vergleichbar — wie im Plasmazentrum — ,so heben sich die beiden zum Ionen- und Elektronentemperaturgradienten proportionalen Terme weitgehend auf, da auch das Vorzeichen der Ladung eingeht.

Aufgrund experimenteller Daten ist weder dieses Profil des elektrischen Feldes noch das von Rechnung 10 ausgezeichnet, denn Messungen des elektrischen Feldes so nahe am Plasmarand konnten noch nicht durchgeführt werden. In der Plasmamitte sehen sich beide Profile sehr ähnlich.

Der Zusammenhang zwischen anomaler Diffusion und selbstkonsistentem elektrischen Feld soll noch zuletzt diskutiert werden. Die Sprechweise, daß die anomale Diffusion als ambipolar vorausgesetzt wird, legt nahe anzunehmen, daß die ambipolare Diffusion keinen Einfluß auf das radiale elektrische Feld hat. Dies trifft zu, wenn man die Ambipolaritätsbedingung für konstante Gradienten  $n'$ ,  $T_e'$ ,  $T_i'$  auswertet, wie es für Rechnungen auf einer kurzen Zeitskala erforderlich ist.

Bei den hier vorliegenden Rechnungen für den stationären Fall muß aber von



vorgegebenen Flüssen  $\Gamma_n, \Gamma_{T_e}, \Gamma_{T_i}$  ausgegangen werden. Bei Berechnung der Gradienten aus den Flüssen gehen jetzt aber alle Transporteigenschaften, auch der anomale Transport ein. Die so bestimmten Gradienten werden in der Gleichung  $\Gamma_{n_e} - \Gamma_{n_i} = 0$  verwendet. Der anomale Transport hat damit unmittelbaren Einfluß auf die Bestimmung des elektrischen Feldes, nicht nur indirekt über eine Veränderung der Profile. Der Effekt des anomalen Transportes ist in Bild 19 dargestellt. Die Situation entspricht der von Rechnung 11 beim Radius von 5 cm.

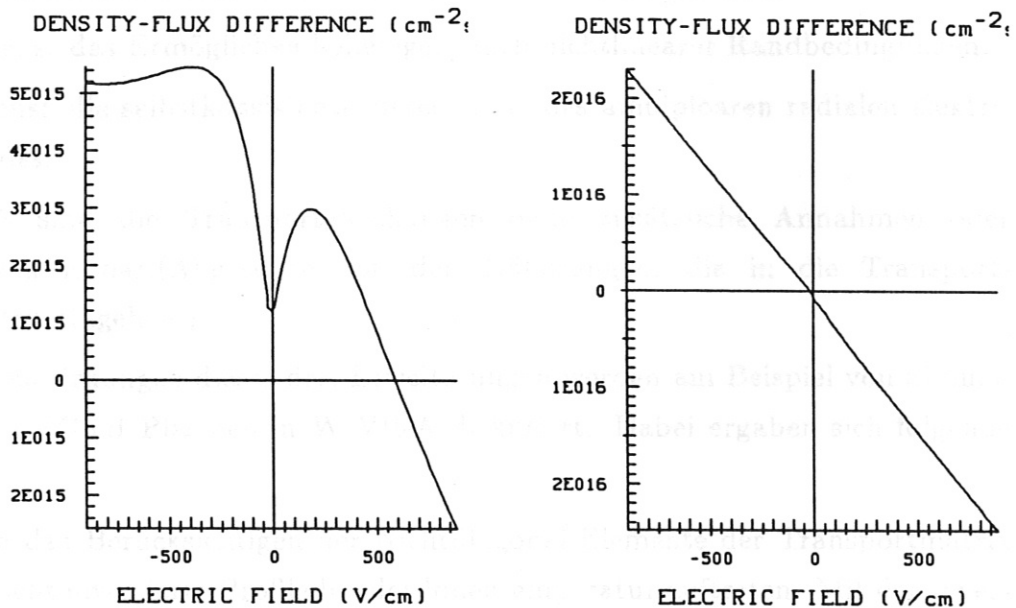
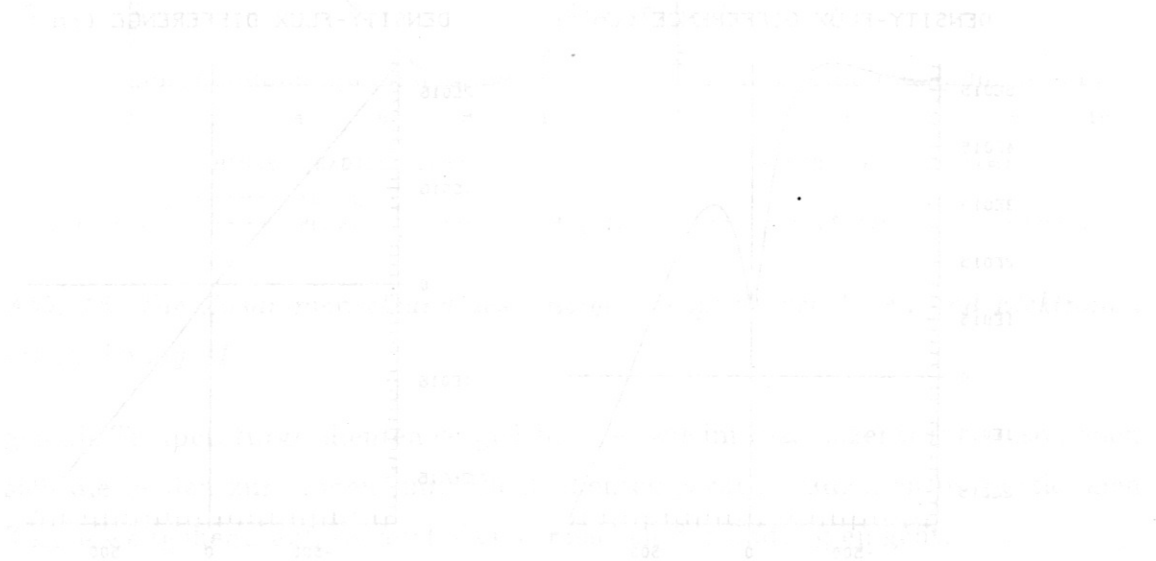


Abb. 19: Die Differenz von Ionen- und Elektronenteilchenfluß  $\Delta(E) = \Gamma_{n_e}(E) - \Gamma_{n_i}(E)$  als Funktion des elektrischen Feldes. — Ohne (links) und mit (rechts) Berücksichtigung des anomalen Transports

Wichtiger als die Reduktion des elektrischen Feldes auf fast ein Zehntel durch die anomale Diffusion ist die Tatsache, daß das lokale Minimum nahe bei  $E = 0$  verschwindet. Das bedeutet, daß der anomale Transport geeignet ist, das Auftreten mehrfacher Lösungen der Ambipolaritätsbedingung zu unterbinden. Es ist möglich, daß das Problem der mehrfachen Lösungen für die Ambipolaritätsbedingung bei W VII-A nur auf Grund des dominierenden anomalen Transports nicht aufgetreten ist.

Am Plasmarand ist aber auch die reduzierende Wirkung des anomalen Transportes wichtig. Wegen der extrem steilen Gradienten, die dort auftreten, wenn man den anomalen Transport vernachlässigt, erhält man auch extrem große elektrische Felder für diesen Fall. Die Rechnungen ergaben Werte von bis zu 10 – 20 kV/cm.

Die Berechnung des elektrischen Feldes, nicht nur radial, sondern auch polwärts, ist für die Änderung der Breite des anomalen Transportes sehr wichtig. Die Berechnung ist in Bild 19 dargestellt. Die Kurven entsprechen den von Rechnung 11 beim Radius von 5 cm



Die Kurven entsprechen den von Rechnung 11 beim Radius von 5 cm

Wichtig ist die Funktion des elektrischen Feldes auf das Verhalten der Teilchen. Die Funktion des elektrischen Feldes ist durch die Poisson-Gleichung  $\Delta \Phi = -\rho$  gegeben, wobei  $\rho$  die Ladungsdichte ist. Die Funktion des elektrischen Feldes ist durch  $E = -\nabla \Phi$  gegeben. Die Funktion des elektrischen Feldes ist durch die Poisson-Gleichung  $\Delta \Phi = -\rho$  gegeben, wobei  $\rho$  die Ladungsdichte ist. Die Funktion des elektrischen Feldes ist durch  $E = -\nabla \Phi$  gegeben.

## V. Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Transportgleichungen werden mit einer neuen numerischen Methode, dem Multiple Shooting/Splitting Verfahren gelöst. Dieses Verfahren ist eine Erweiterung des bekannten Multiple Shooting Verfahrens, welche auf die besonderen Eigenarten des Transportproblems abgestimmt ist.

Mit dem neuen Verfahren sind verglichen mit älteren Codes (z.B. TEMPL) drei wesentliche Erweiterungen ermöglicht worden.

Erstens: die Verwendung der gesamten Transportmatrix, nicht nur der Diagonal-Elemente. Darunter fällt u.a. auch die Thermodiffusion.

Zweitens: das Ermöglichen beliebiger, auch nichtlinearer Randbedingungen.

Drittens: die selbstkonsistente Berechnung des ambiploaren radialen elektrischen Feldes.

Damit sind die Transportgleichungen ohne zusätzliche Annahmen oder Näherungen lösbar. (Abgesehen von den Näherungen, die in die Transportkoeffizienten eingehen.)

Die Auswirkungen dieser drei Erweiterungen werden am Beispiel von Simulationen von ECRH Plasmen in W VII-A diskutiert. Dabei ergaben sich folgende Resultate.

Durch das Berücksichtigen der Nichtdiagonal-Elemente der Transportmatrix können leicht invertierte Profile bei der Iontemperatur auftreten. Mit der Invertierung geht auch eine leichte Verbreiterung der Profile einher. Dies zeigt, daß die Nichtdiagonal-Elemente bei quantitativen Vergleichen mit Meßwerten durchaus nicht vernachlässigbar sind. Die Profile für die Elektronentemperatur bleibt nahezu unverändert.

Als modifizierte Randbedingung wurde das Modell "Energiefluß am Rand = kinetische Energie mal Teilchenfluß am Rand" verwendet. Dabei stellte es sich als notwendig heraus starke Verluste bei den Elektronen in der Plasmarandschicht anzunehmen.

Das selbstkonsistent berechnete radiale elektrische Feld stimmt qualitativ mit gemessenen Werten überein. Wie erwartet verbessert das elektrische Feld das Transportverhalten. Auch in dieser Beziehung fällt die Reaktion bei den Ionen

am stärksten aus. Die Verluste, die durch Berücksichtigung der Nichtdiagonalelemente entstanden sind, werden mehr als kompensiert.

Der Rechenzeitbedarf ist gegenüber Rechnungen mit vorgegebenem elektrischen Feld stark gestiegen. Das liegt daran, daß jedesmal, wenn die Ableitungen von Dichte und der Temperaturen bestimmt werden, die Ambipolaritätsbedingung gelöst werden muß. Da diese mehrere Lösungen besitzen kann, ist es notwendig sicherzustellen, daß immer die gleiche Lösung verwendet wird. Dies ist nur dadurch möglich, daß nach allen drei Lösungen gesucht wird, was den stark erhöhten Rechenaufwand bedingt.

Sorgfältig wurde untersucht, ob durch das vollständige Behandeln der neoklassischen Theorie die anomalen Verluste erklärbar sind. Die Antwort ist eindeutig negativ. Die Ergebnisse von Rechnungen ohne Berücksichtigung anomaler Verluste haben keinerlei Ähnlichkeit mit Meßdaten. Das gilt insbesondere für das ambipolare elektrische Feld.



## DANKSAGUNG

Ich möchte mich bedanken bei Herrn Professor Lortz, der die Betreuung meiner Diplomarbeit übernahm, sowie allen Mitgliedern der Stellarator-Gruppe am IPP, die mir in zahlreichen Diskussionen wertvolle Hinweise und Anregungen gegeben haben. Mein besonderer Dank gilt hier Herrn Dr. Wobig, der mir den TEMPL-Code zur Verfügung stellte und dessen Kommentare und Anregungen stets besonders hilfreich waren.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R.Romatka: Die numerische Behandlung der Transportgleichungen im Stellarator-Plasma  
Diplomarbeit an der Ludwigs-Maximilians-Universität  
München (15. Mai 1987)
- [2] L.M.Kovrizhnykh: "The energy confinement time in stellarators"  
*Nucl. Fusion* **24**(4) (1984) 435.
- [3] H.Wobig, W VII-A Team: "A transport model of ECR-heated Plasmas in W VII-A"  
13<sup>th</sup> European Conference on Controlled Fusion and Plasma Heating  
Schliersee 14 - 18 April 1986 p. 291
- [4] A.W.Bailey, G.A. Emmert, K.J. Lee: "WHISTEL, a stellarator transport code"  
University of Wisconsin Fusion Design Memo-477, Oktober 1982
- [5] H.E.Mynick, W.N.G.Hitchon: "Effect of the ambipolar potential on stellarator confinement"  
*Nucl. Fusion* **23**(8) (1983) 1053.
- [6] D.E.Hastings: "Bifurcation phenomena and the radial electric field in a nonaxisymmetric plasma"  
*Phys. Fluids* **29**(2) (1986) 536.
- [7] D.E.Hastings, W.A.Houlberg, K.C. Shaing : "The ambipolar electric field in stellarators" *Nucl. Fusion* **25**(4) (1985) 445.
- [8] P.J.Catto, J.R.Myra, D.E.Hastings: "Comments on " Bifurcation phenomena and the radial electric field in a nonaxisymmetric plasma" "  
*Phys. Fluids* **29**(8) (1986) 2760.
- [9] F.L.Hinton, R.D.Hazeltine: "Theory of plasma transport in toroidal confinement systems"  
*Rev. Mod. Phys.* **48**(2) (1976) 23.

- [10] L.M.Kovrizhykh: "Neoclassical theory of transport processes in toroidal magnetic confinement systems with emphasis on non-axisymmetric configurations"  
*Nucl. Fusion* **24**(7) (1984) 857.
- [11] K.C.Shaing: "Stability of the radial electric field in a nonaxisymmetric Torus"  
*Phys. Fluids* **27**(7) (1984) 1567.
- [12] R.H.Fowler,J.A.Rome,J.F.Lyon: " Monte Carlo studies of transport in stellarators"  
*Phys. Fluids* **28**(1) (1985) 338.
- [13] H.E.Mynick,W.N.G.Hitchon: "A bounce-averaged Fokker-Planck- code for stellarator transport"  
*Nucl. Fusion* **26**(4) (1986) 25.
- [14] W VII-A Team: "Elektron heat transfer and density fluctuations in the Wendelstein VII-A Stellarator"  
Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research Brussels 1 – 10 July 1980  
8<sup>th</sup> Conference Proceedings Vol I 173.
- [15] P.J.Catto,J.R.Myra: "Ambipolar solution nearest equilibrium"  
*Plasma Phys Contr Fusion* **28**(3) (1986) 959.
- [16] K.C.Shaing: " Noise-induced transition of the radial electric field in a nonaxisymmetric torus"  
*Phys. Fluids* **27**(8) (1984) 1924.
- [17] P.J.Catto,J.R.Myra: " Comments on " Stability of the radial electric field in a nonaxisymmetric torus" "  
*Phys. Fluids* **29**(6) (1986) 2020.
- [18] K.C.Shaing: "Reply to comments of Catto and Myra"  
*Phys. Fluids* **29**(6) (1986) 2021.

- [19] J.W.Connor,R.J.Hastie: "Neoclassical diffusion in an  $\ell = 3$  stellarator"  
*Phys. Fluids* 17(1) (1974) 114.
- [20] W.B.Kunkel (Hrsg) "Plasma physics in theory and application" p. 108  
McGraw-Hill New York 1966
- [21] Stoer, Bulirsch :  
Einführung in die numerische Mathematik, Band II  
Springer Verlag Berlin 1973
- [22] R.Bulirsch,J.Stoer: "Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods"  
*Num. Math.* 8 (1966) 1.
- [23] J.Stoer: "Extrapolation Methods for the Solution of Initial Value Problems and their Practical Realisation"  
in: "Proceedings of the Conference on the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations" 19 20 October 1972 The University of Texas at Austin, 1.  
Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag Berlin 1974
- [24] W VII-A Team,NI Group: "Neutral injection heating in the Wendelstein VII-A Stellarator"  
Plasma Physics an controlled nuclear fusion research 1982 Balitimore  
9th conference proceedings Vol II
- [25] K.J.S.Mertens,W.N.G.Hitchon,D.T.Anderson,J.L.Shohet:  
"One-dimensional modeling of transport in small stellarators"  
Report: TSL-86-3 University of Wisconsin-Madison
- [26] H.Wobig,H.Maasberg,H.Renner,W VII-A Team,ECRH Group,NI Group:  
"Plasma confinement in the Wendelstein VII-A Stellarator"  
11<sup>th</sup> International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research Kyoto,Japan 13 - 20 Nov. 1986  
Vortrag IAEA-CN-47/D-I-2